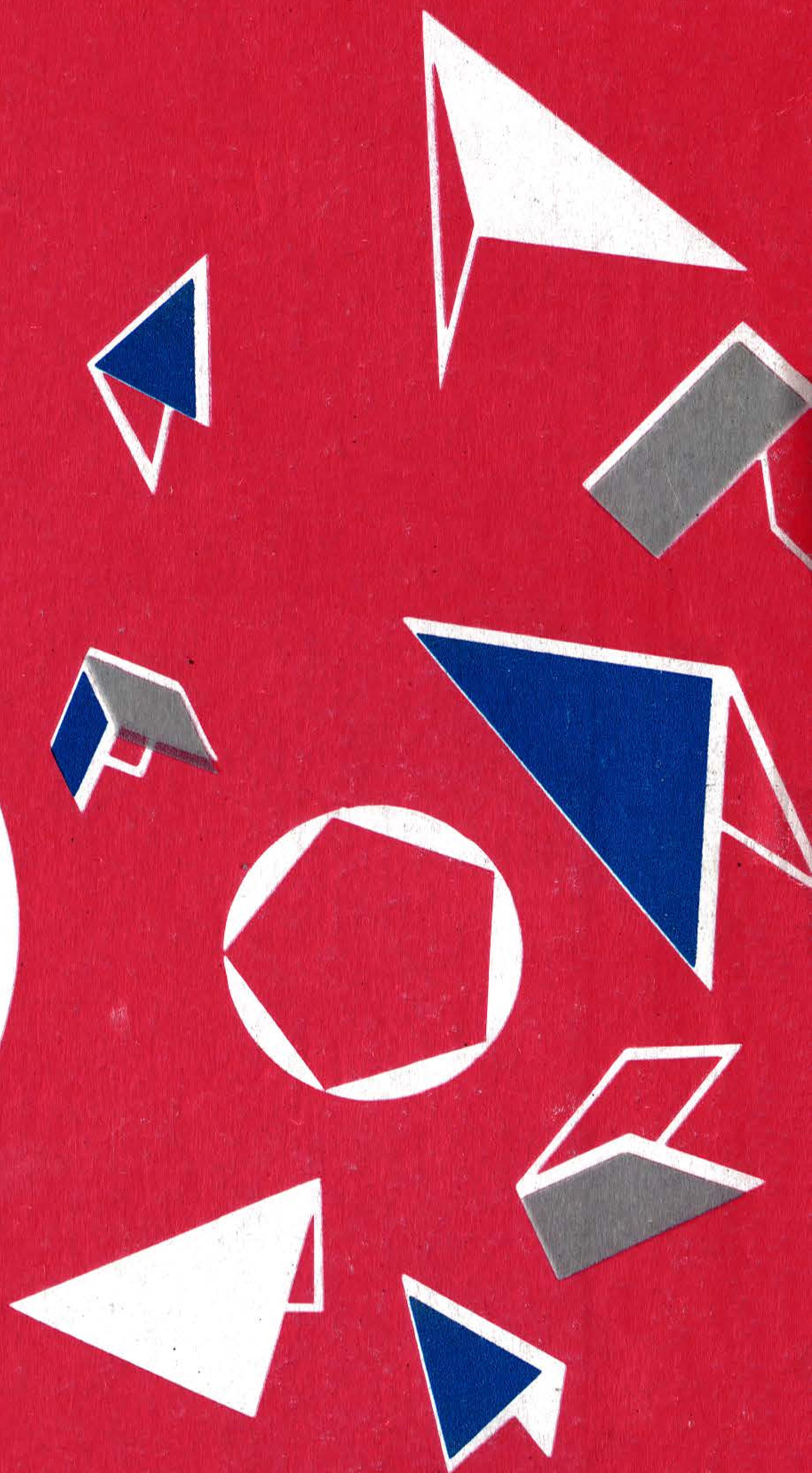


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الرِّيَاضِيَّات





السنة الثامنة من التعليم الأساسي

9 8 7 6 5 4 3 2 1

الجمهوريـة الجزائريـة الديمقراطيـة الشعبيـة

—

وزارة التربيـة الوطنيـة

—

الرِّيَاضِيَّات

السنة الثامنة من التعليم الأساسي

المؤلفون :

أكلي سلاوتي | طاهر عمور

ابراهيم لعسل | مقتدر زروقي

إشراف : المفتشة العامة للرياضيات
السيدة زهيـة فارسي.



المعهد التربوي الوطني - الجزائر

ى * تصوير ومعالجة : عمروسي كمال * تصوير ومعالجة : عمروسي كمال * تصوير ومعالجة : عمروسي كمال تصوير ومعالجة : عمروسي كمال

بسم الله الرحمٰن الرحيم

هذا الكتاب هو الثاني من سلسلة كتب الرياضيات للطور الثالث من التعليم الأساسي ، وهو موجه لتلميذ السنة الثامنة .

لقد وضع وفق منهجية تجعله في متناول التلميذ ، إذ قدمت الدروس فيه على شكل أنشطة موجهة وأمثلة موضحة متبوعة بتمارين تطبيقية ، وكل ذلك يعتبر منهجية تثير حوافز التلميذ وتدفعه الى البحث وتمكنه من استيعاب التعاريف والخواص والنظريات .

لقد كان الاهتمام في السنة السابعة منصبًا على التقنيات الحسابية والإنشاءات الهندسية والتعبير الدقيق ، ويبقى هذا الإهتمام متواصلًا في السنة الثامنة .

نشير إلى أننا أدرجنا لأول مرة ضمن دروس هذا الكتاب فكرة البرهنة والتدريب على الإستدلال كما يظهر ذلك من خلال تقديم النظريات على شكل مسائل محلولة .

يتضمّن هذا الكتاب تمارين محلولة تُدَرّبُ التلميذ على فكرة البرهان وكيفية توظيف مكتسباته .

ونذكر هنا بأننا قدمنا مواضيع الجبر والهندسة بصفة متوازية حرصا على التكامل والإنسجام بين هذه المواضيع .

وأخيرًا نرجو أن يكون عملنا هذا في تنظيمه ومنهجيته مساهمة فعالة في مجال تطوير تدريس الرياضيات في بلادنا .

والله ولي التوفيق

المؤلفــون

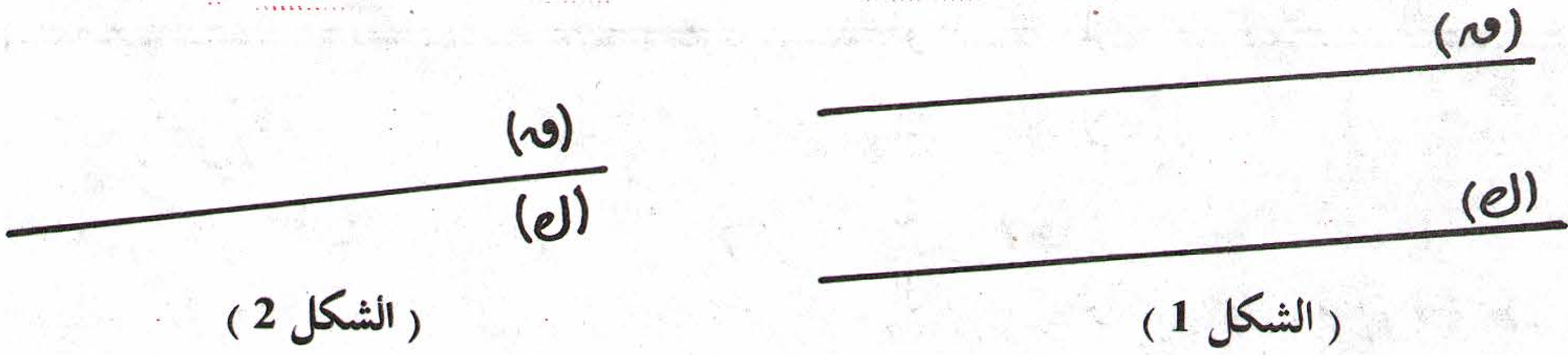
1 المستقيمات والزوايا

الأوضاع النسبية لمستقيمين

1 ـ المستقيمان المتوازيان :

تعريف :

المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان إما منفصلان وإما متطابقان

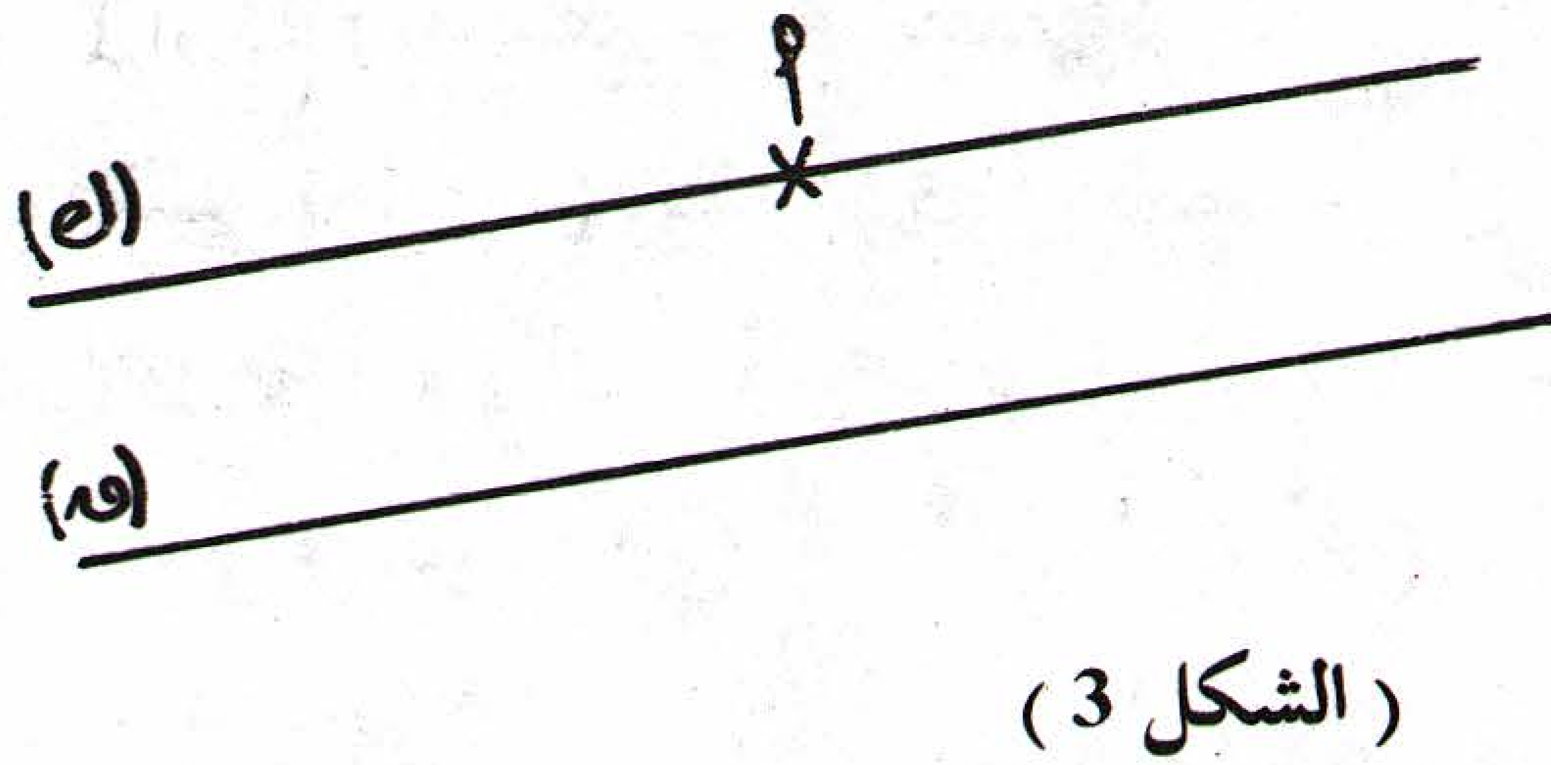


(الشكل 1) (الشكل 2)

في الشكل (1) : (ف) ∩ (ل) = ϕ ، نقول إن (ف) و (ل) **متوازيان تماما** .

في الشكل (2) : (ف) ∩ (ل) = (ف) = (ل) ، نقول إن (ف) و (ل) **متطابقان** .

- (ق) مستقيم و أ نقطة لا تنتمي إليه (الشكل 3)



(الشكل 3)

تعلم أنه :

★ يوجد مستقيم وحيد يوازي مستقيما معلوما ويشمل نقطة معلومة .

- هذا النص يعبّر عن حقيقة رياضية نقبلها دون تعليل وتسمى **بديهية إقليدس**

توجد بديهيات أخرى مثل :

- « مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة غير منتهية »
- « يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطتين مختلفتين ».
- « المستقيم هو مجموعة من النقط غير منتهية » .

(ﻭ) مستقيم ، أ نقطة لا تنتمي إليه . - أنشىء باستعمال المسطرة والكوس ، ثم باستعمال المسطرة والمدور المستقيم (ﻙ) الذي يشمل أ ويوازي (ﻭ) .

○ **خواص :**

- مهما يكن المستقيم (ﻭ) ، فإن (ﻭ) يوازي (ﻭ)
- (ﻭ) و (ﻙ) مستقيمان ، إذا كان (ﻭ) // (ﻙ) فإن (ﻙ) // (ﻭ) .
- (ﻭ) ، (ﻙ) ، (ل) ثلاثة مستقيمات ،

إذا كان (ﻭ) // (ﻙ) و (ﻙ) // (ل) فإن (ﻭ) // (ل) .

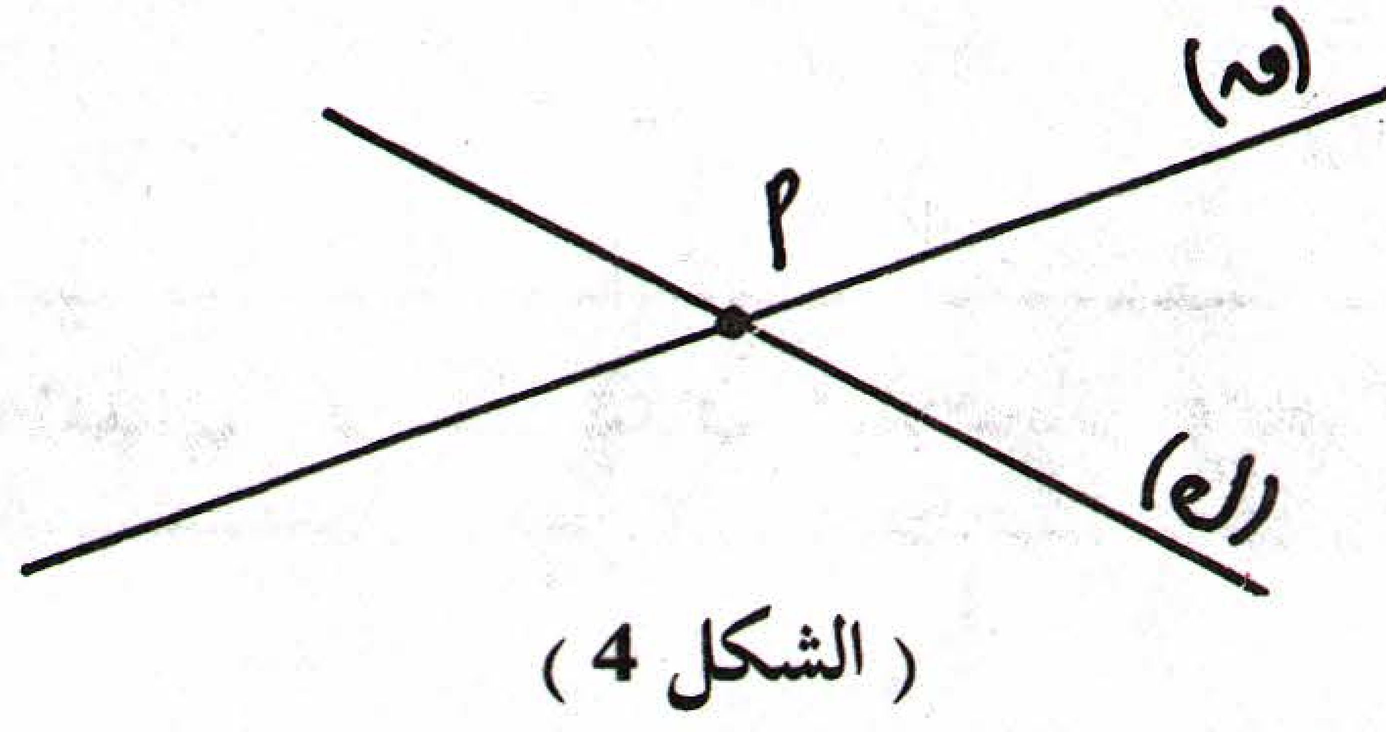
1) (ﻭ) مستقيم ، م نقطة لا تنتمي إليه . - أنشىء (ﻭ') نظير (ﻭ) بالنسبة إلى م . ماذا تلاحظ ؟ 2) (ﻭ) ، (ﻙ) مستقيمان متوازيان . - أنشىء نظير (ﻭ) بالنسبة إلى (ﻙ) ، ثم نظير (ﻙ) بالنسبة إلى (ﻭ) . ماذا تلاحظ ؟

2 - المستقيمان المتقاطعان :

تعريف :

المستقيمان المتقاطعان هما مستقيمان يشتركان في نقطة واحدة .

(ق) ، (ك) مستقيمان متقاطعان في النقطة أ معناه (ق) ∩ (ك) = { أ } .



(الشكل 4)

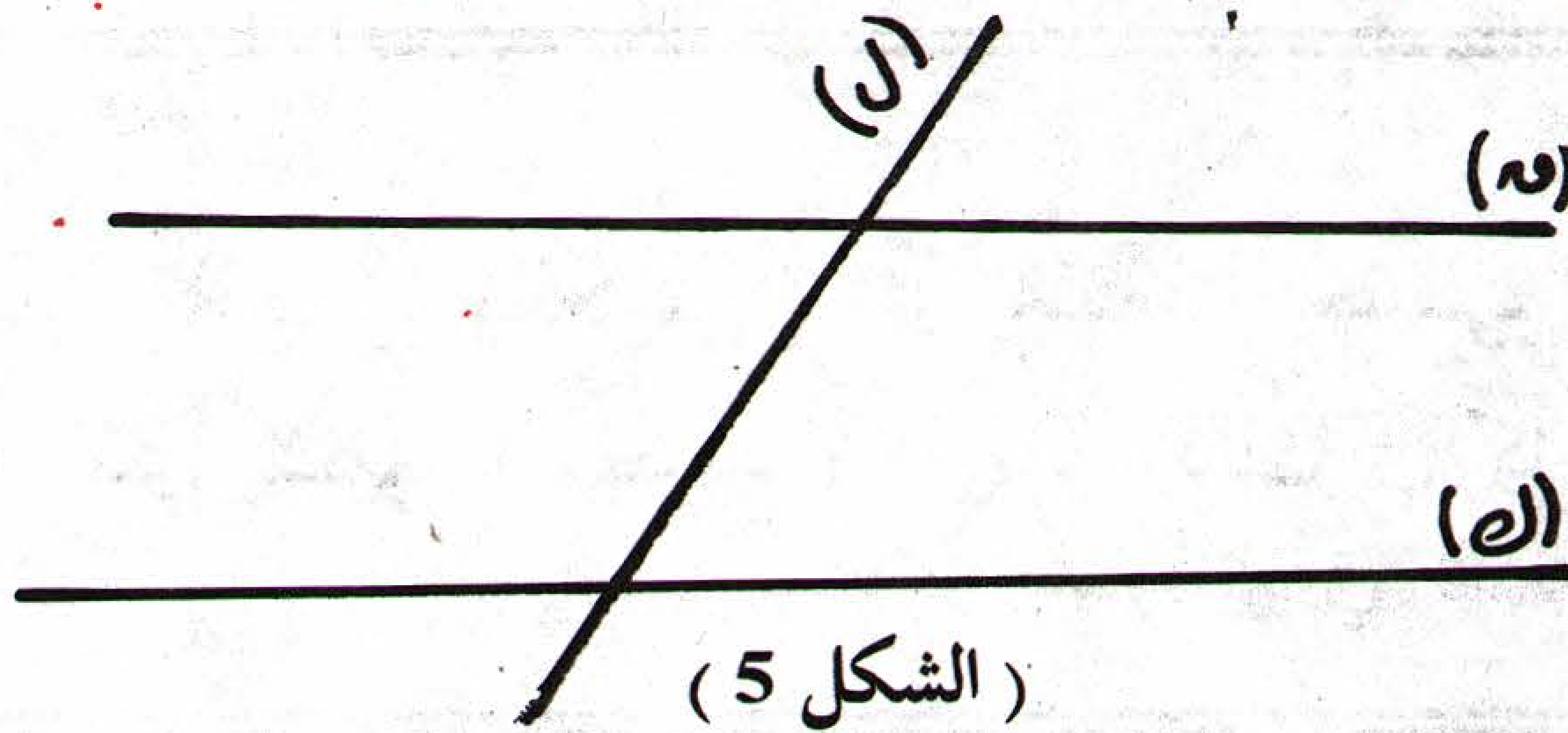
1) (ق) ، (ك) مستقيمان متقاطعان .
ـ أنشئ (ق′) نظير (ق) بالنسبة إلى (ك) .
2) (ق) ، (ك) مستقيمان متقاطعان ، م نقطة حيث م ∉ (ق) و م ∉ (ك) .
ـ أنشئ نظير كل منهما بالنسبة إلى م . ماذا تلاحظ ؟

★ **بديهية :**

إذا اشترك مستقيمان في أكثر من نقطة ، فهما متطابقان .

خواص :

- المستقيمان المتقاطعان يعيّنان أربع زوايا ؛ كل زاويتين متجاورتين متكاملتان وكل زاويتين متقابلتين بالرأس متقايستان .
- إذا قطع مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإنه يقطع الآخر .



(الشكل 5)

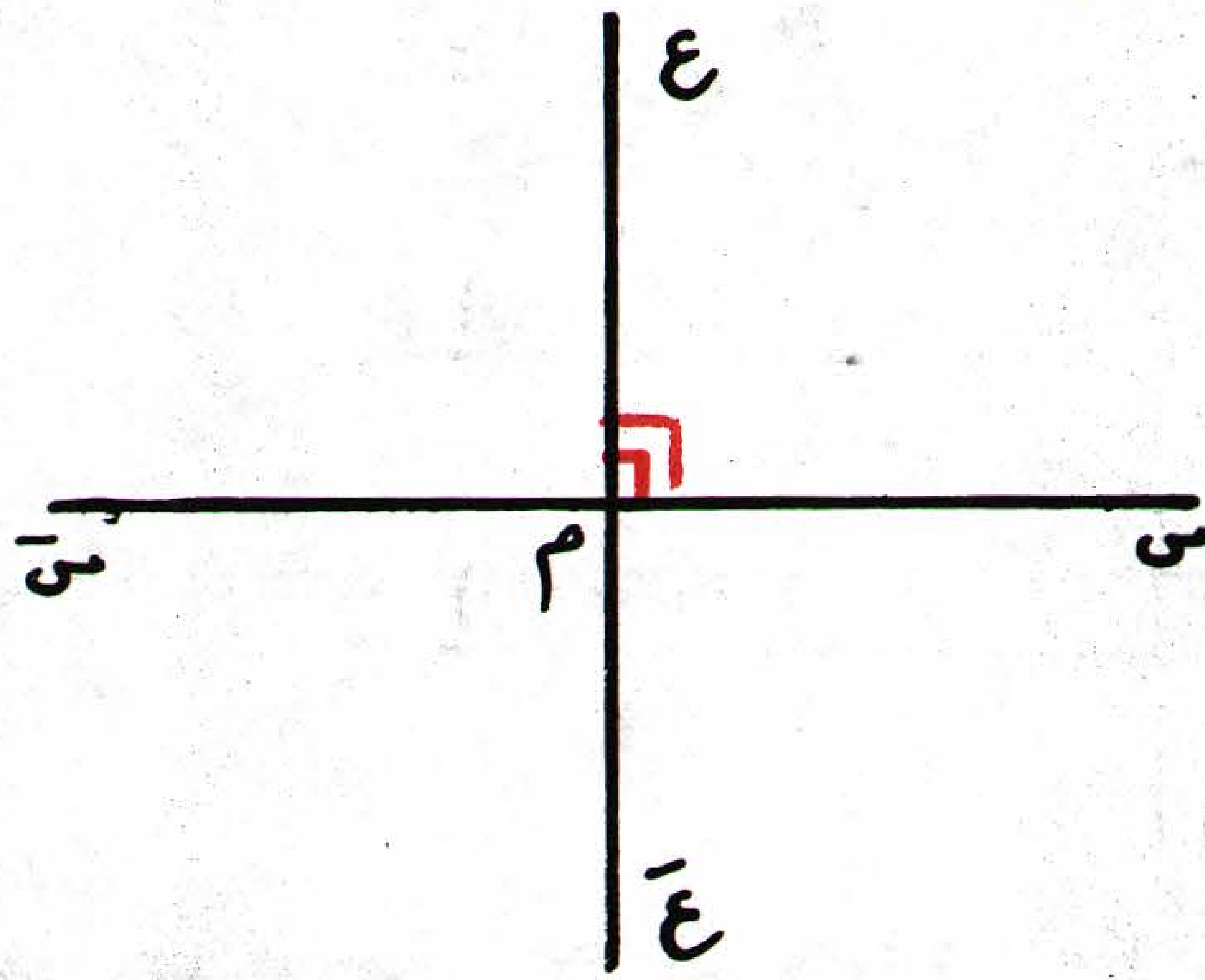
حالة خاصة : المستقيمان المتعامدان .

تعريف :

المستقيمان المتعامدان هما مستقيمان متقاطعان ويعينان زاوية قائمة .

في الشكل (6) المستقيمان (س سَ) و (ع عَ) متعامدان في النقطة م .

نكتب (س سَ) ⊥ (ع عَ) .



(الشكل 6)

★ **بديهية :**

يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة ويعامد مستقيما معلوما .

(ق) مستقيم ، أ نقطة .

ـ أنشىء باستعمال المسطرة والكوس ، ثم باستعمال المسطرة والمدور ، المستقيم (ك) الذي يشمل أ ويعامد (ق) ، وذلك في كل من الحالتين :

1) أ ∉ (ق) ؛ 2) أ ∈ (ق) .

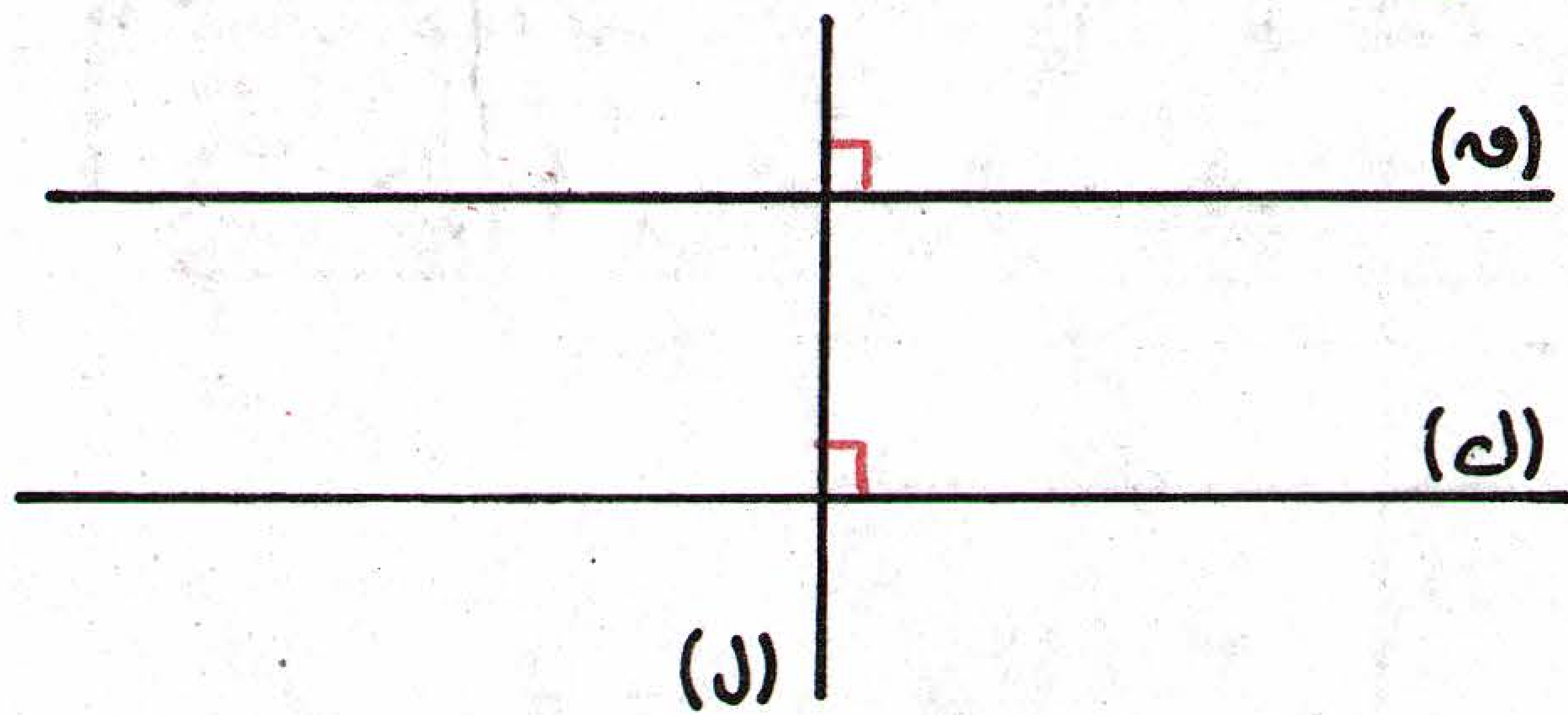
خواص :

- مهما يكن المستقيم (و) ، فإن (و) لا يعامد (و) .
- (و) ، (ك) مستقيمان ، إذا كان (و) ⊥ (ك) فإن (ك) ⊥ (و) .
- (و) ، (ك) ، (ل) ثلاثة مستقيمات :

إذا كان (و) ⊥ (ك) و (ك) ⊥ (ل) فإن (و) // (ل) ..

نتائج :

- المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر .
- المستقيمان العموديان على مستقيم واحد متوازيان (الشكل 7) .

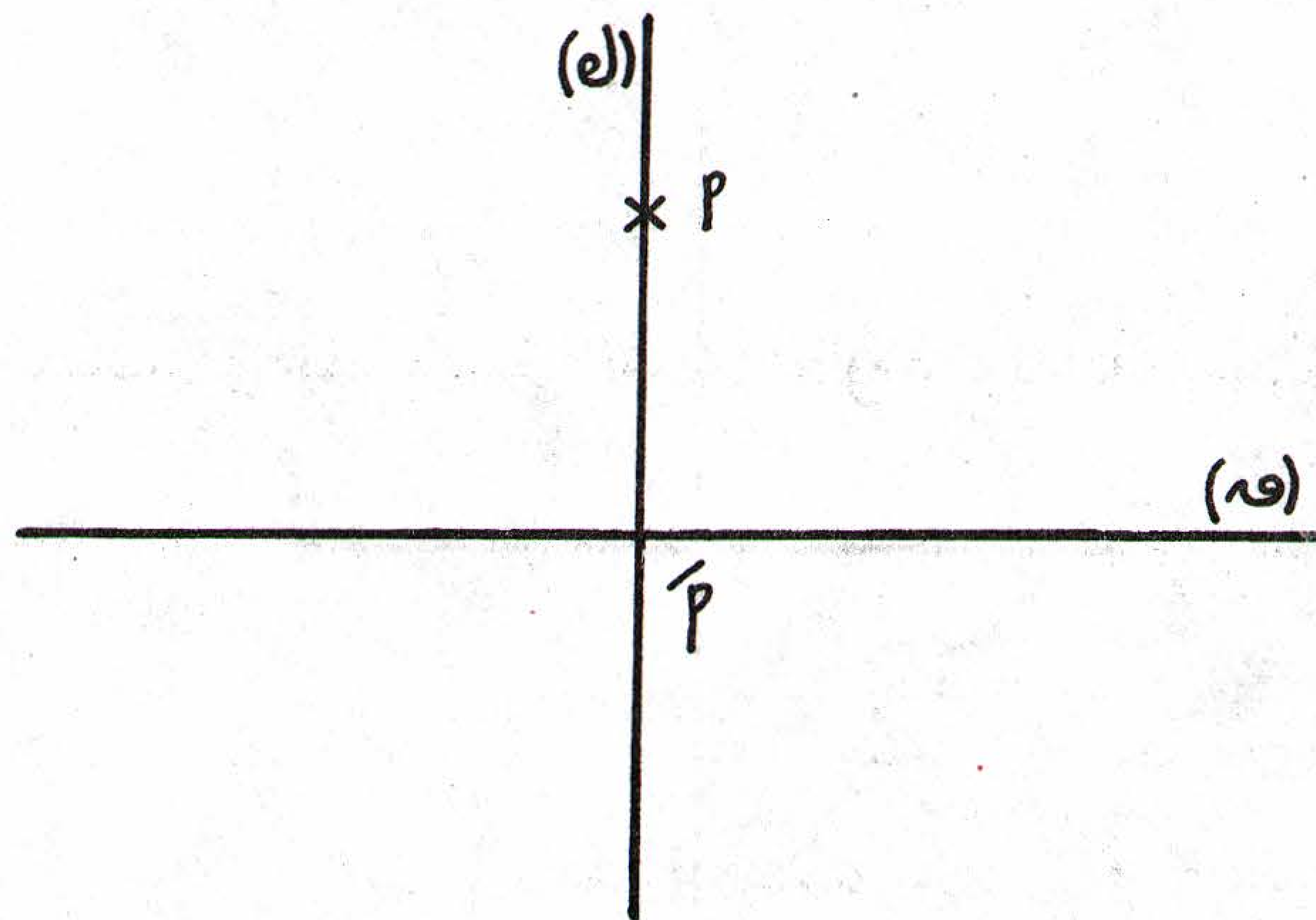


(الشكل 7)

3 ـ تطبيقات :

- **المسافة بين نقطة ومستقيم :**

(و) مستقيم ، أ نقطة حيث أ ∉ (و) . الشكل (8) .



(الشكل 8)

(ل) هو المستقيم الذي يشمل ا ويعامد (ﻫ) في النقطة ا′ .

• النقطة ا′ هي **المسقط العمودي** للنقطة ا على (ﻫ) .

• الطول اا′ هو **المسافة** بين النقطة ا والمستقيم (ﻫ) .

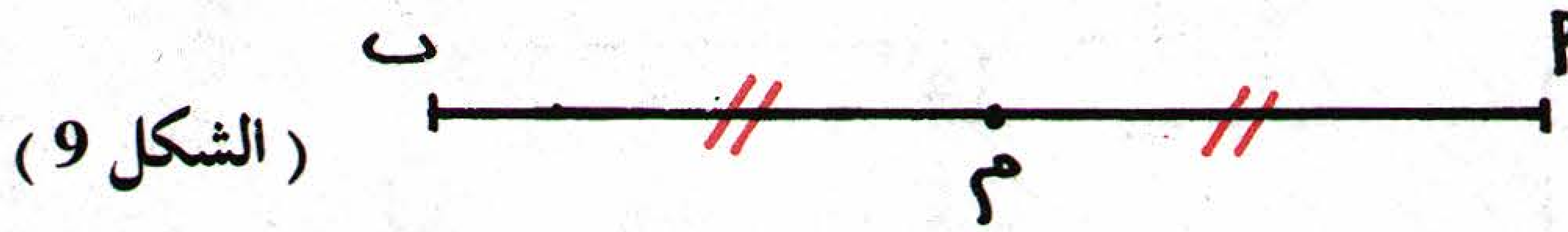
ملاحظة :

ـ إذا كانت ا تنتمي إلى (ﻫ) فالمسقط العمودي للنقطة ا على (ﻫ) هو ا نفسها .
فالمسافة بين ا و (ﻫ) **معدومة** .

• **منتصف ومحور قطعة مستقيمة :**

تعريف :

منتصف قطعة مستقيمة [ا ب] هو النقطة م من [ا ب] حيث : م ا = م ب
في الشكل 9 م منتصف [ا ب] .

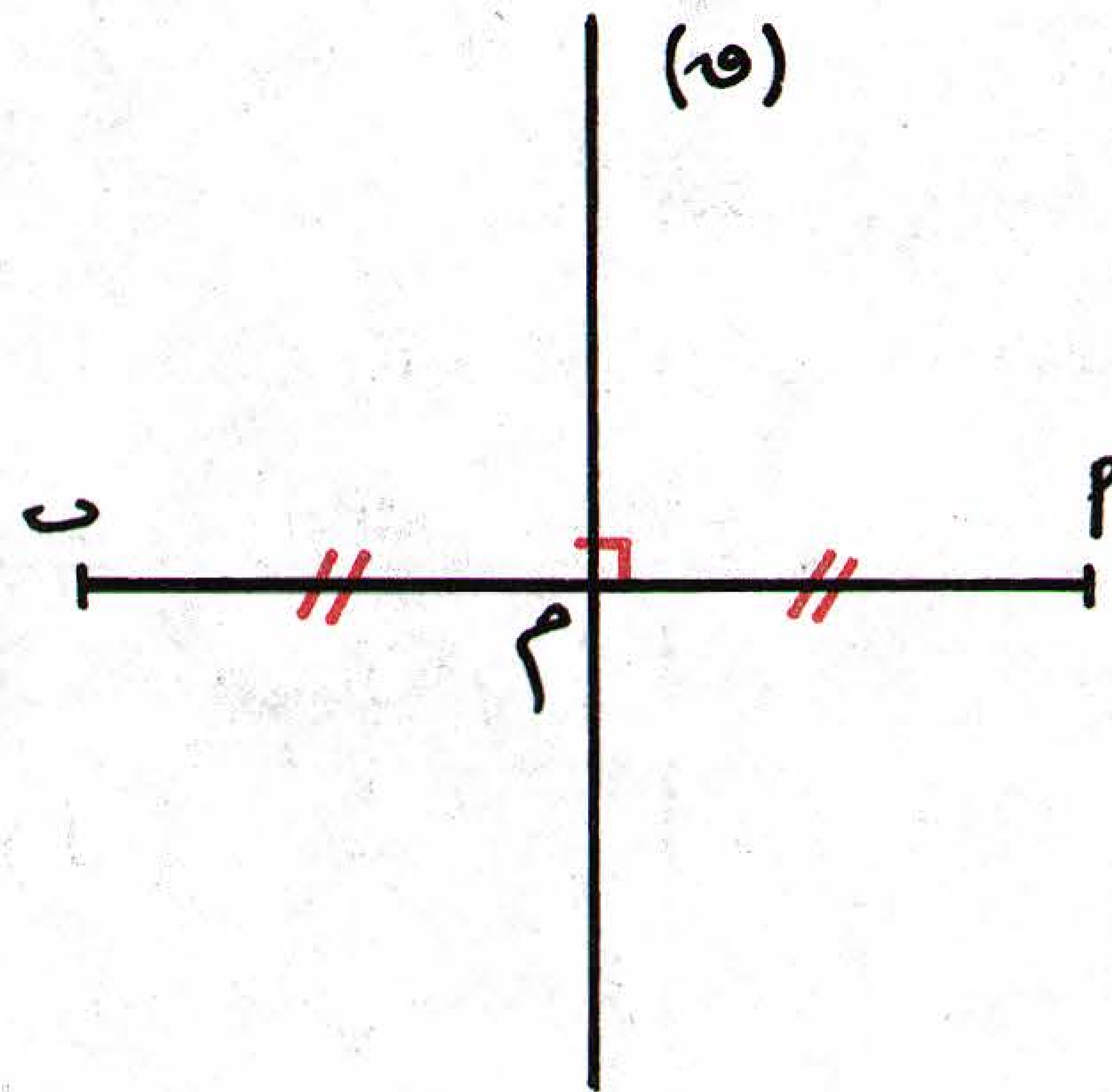


(الشكل 9)

تعريف :

محور قطعة مستقيمة هو المستقيم العمودي على حامل هذه القطعة في منتصفها

في الشكل (10) ، (ﻫ) هو محور [ا ب] .



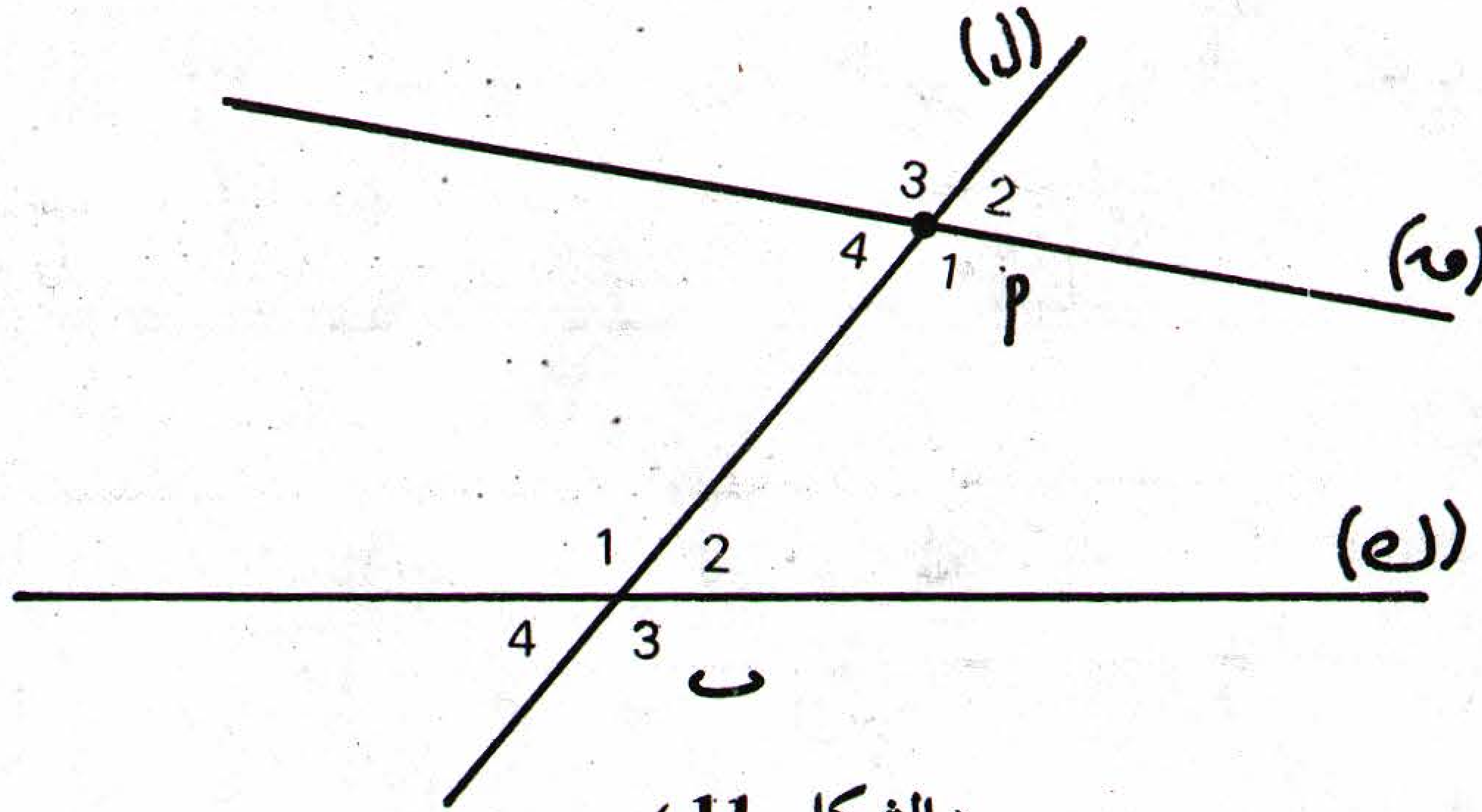
(الشكل 10)

[أ ب] قطعة مستقيمة .
ـ أنشىء محورها باستعمال المدور والمسطرة ثم عيّن منتصفها .

الزوايا المعيّنة بمستقيمين وقاطع لهما

1 ـ تسميات :

(ق) و (ك) مستقيمان ، (ل) قاطع لهما في النقطتين أ ، ب .



(الشكل 11)

لاحظ في الشكل (11) الزوايا المرقمة والتي نرمز إليها كما يلي :

$أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ، $أ_4$ ، $ب_1$ ، $ب_2$ ، $ب_3$ ، $ب_4$.

- كل من الزوايا $أ_1$ ، $أ_4$ ، $ب_1$ ، $ب_2$ تسمى **زاوية داخلية** .
- كل من الزوايا $أ_2$ ، $أ_3$ ، $ب_3$ ، $ب_4$ تسمى **زاوية خارجية** .
- الزاويتان $أ_1$ ، $ب_1$ داخليتان وغير متجاورتين وواقعتان في جهتين مختلفتين بالنسبة إلى القاطع (ل)،نسميهما **زاويتين متبادلتين داخليا** .
- الزاويتان $أ_2$ ، $ب_4$ خارجيتان وغير متجاورتين وواقعتان في جهتين مختلفتين بالنسبة إلى القاطع (ل) ، نسميهما **زاويتين متبادلتين خارجيا** .
- الزاويتان $أ_2$ ، $ب_2$ واقعتان في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع (ل) وإحداهما داخلية والأخرى خارجية ، فنسميهما **زاويتين متماثلتين** .

1) عيّن في الشكل السابق الزوايا الداخلية والخارجية الواقعة في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع (ل) .
2) عيّن كل المجموعات الثنائية التي عنصرا كل منها زاويتان متبادلتان داخليا .
3) عيّن كل المجموعات الثنائية التي عنصرا كل منها زاويتان متبادلتان خارجيا .
4) عيّن كل المجموعات الثنائية التي عنصرا كل منها زاويتان متماثلتان .
ـ كم مجوعة لديك في كل حالة ؟

2 ـ الزوايا المعينة بمستقيمين متوازيين وقاطع لهما .

نشاط 1 : 1) لنثبت صحة ما يلي :

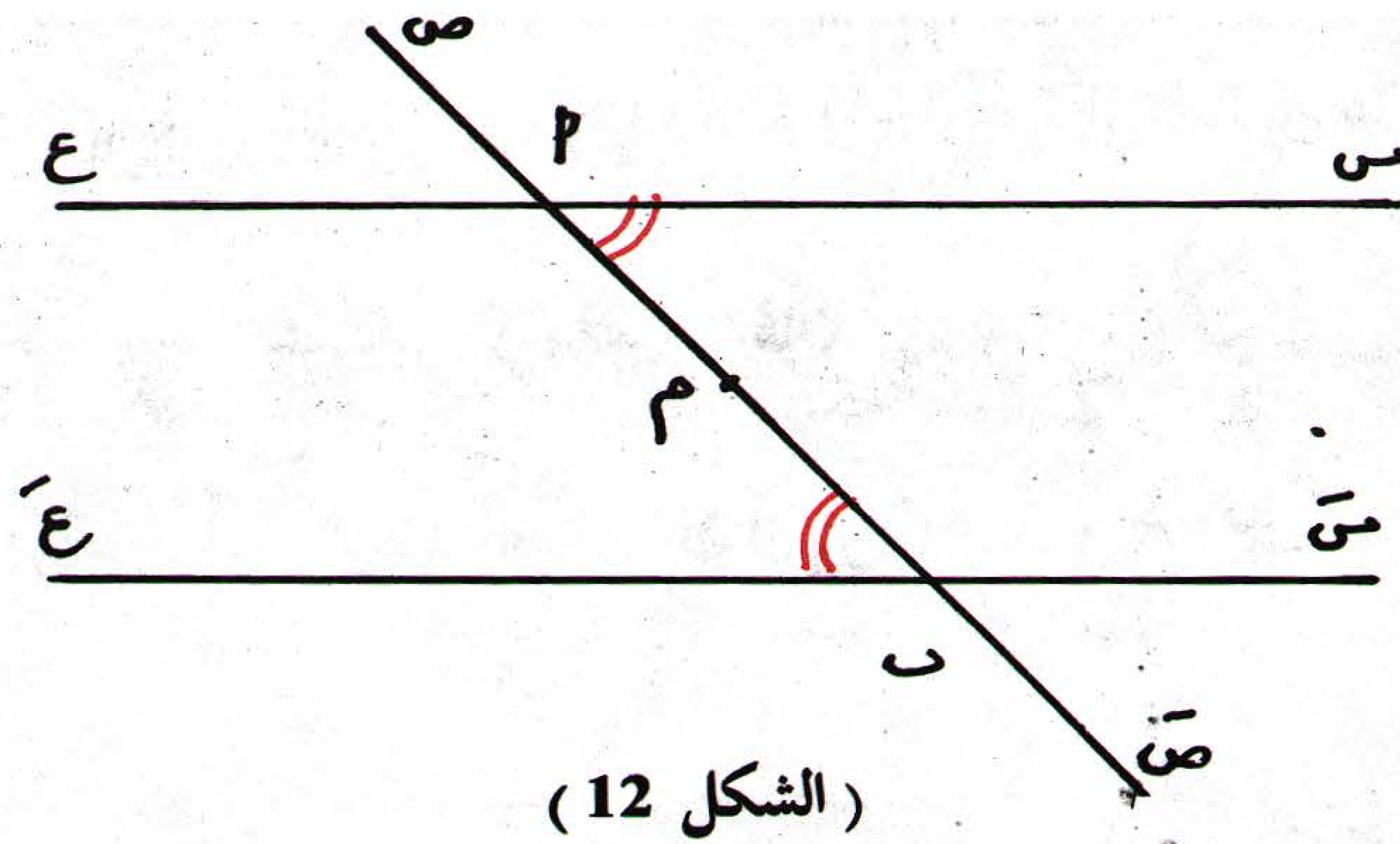
إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ، فإن كل زاويتين متبادلتين داخليا متقايستان .

نميّز في هذا النّص جزأين :

- الجزء الأول « مستقيمان متوازيان وقاطع لهما » يسمى **المعطيات** .
- الجزء الثاني « كل زاويتين متبادلتين داخليا متقايستان » يسمى **المطلوب** .

للوصول إلى إثبات هذا المطلوب نتبع ما يلي :

ـ نرسم مستقيمين متوازيين (س ع) ، (س′ ع′) ومستقيما (ص ص′) قاطعا لهما في النقطتين أ ، ب (الشكل 12) .



(الشكل 12)

ـ نسمي م منتصف [أ ب] فيكون :

[أ صَ و [أ س متناظرين مع [ب ص و [ب ع′ بالنسبة إلى م على الترتيب .

نستنتج أن الزاويتين المتبادلتين داخليا [أ ص′ ، أ س] و [ب ص ، ب ع′] متناظرتان بالنسبة إلى م ، ونعلم أن الزاويتين المتناظرتين بالنسبة إلى نقطة متقايستان .

ـ فهاتان الزاويتان المتبادلتان داخليا متقايستان .

• يمكن أن نثبت أيضا أنّ الزاويتين المتبادلتين داخليا [أ ص′ ، أ ع] ، [ب ص ، ب س′] متقايستان .

• لاحظ أننا توصلنا إلى المطلوب بعد تفسير المعطيات وباستخدام خواص ونتائج معروفة وملائمة وأحيانا إنشاءات هندسية إضافية ومساعدة فهذه الخطوات المتسلسلة تشكل **برهانا** والنتيجة المبرهن عليها تسمى **نظرية** .

2) برهن على النظرية الآتية :

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ، فإن كل زاويتين متبادلتين خارجيا متقايستان .

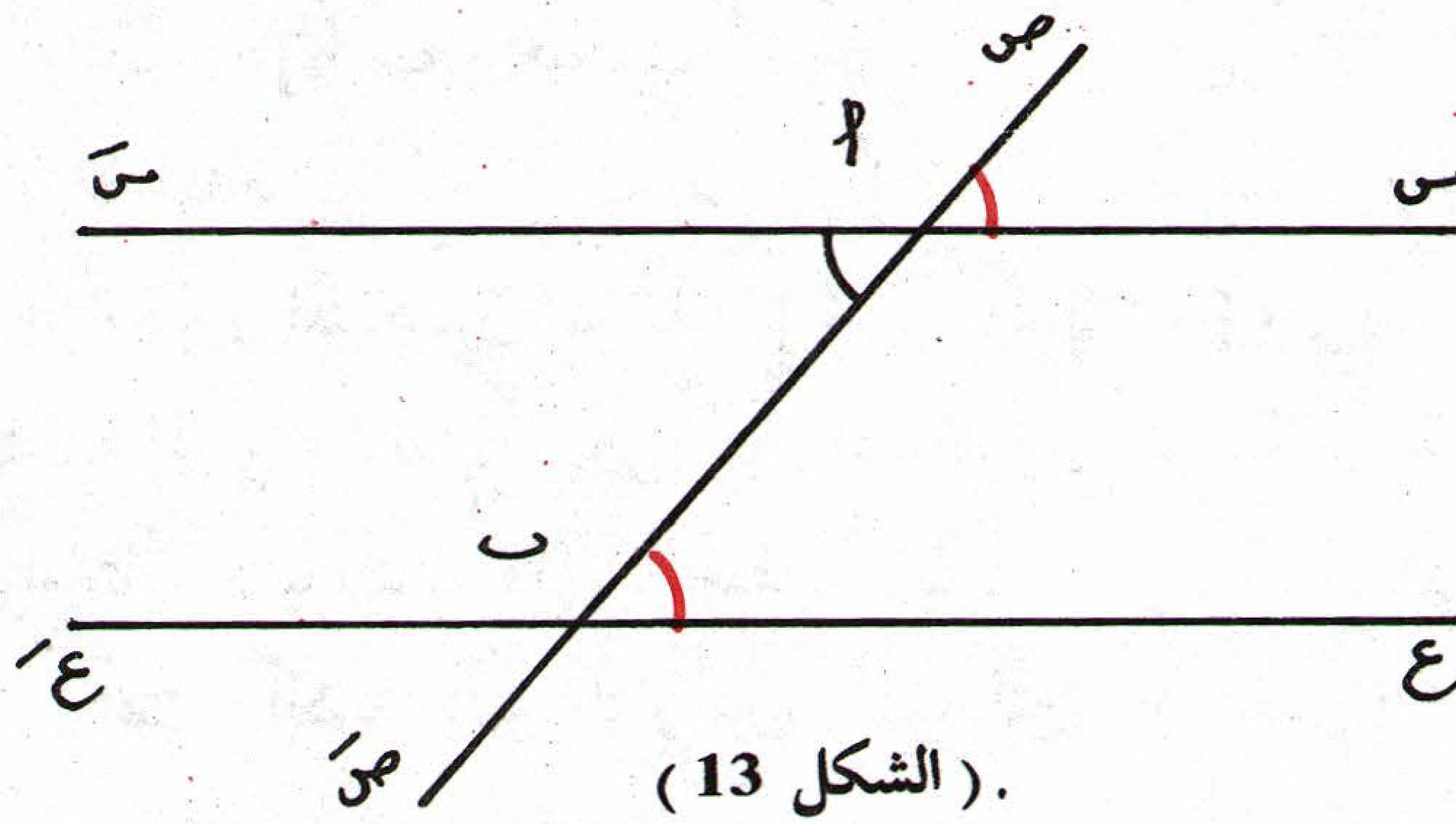
نشاط 2 :

لنبرهن على النظرية الآتية :

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ، فإن كل زاويتين متماثلتين متقايستان .

المعطيات : نفرض أن المستقيمين المتوازيين هما (س س') و (ع ع') .
(ص ص') قاطع لهما في النقطتين أ ، ب .

المطلوب : إثبات أن الزاويتين [ب ع ، ب ص] و [أ س ، أ ص] متقايستان .



(الشكل 13).

البرهان :

بما أن (س س') يوازي (ع ع') و (ص ص') قاطع لهما ، فإن الزاويتين [ب ع ، ب ص] و [أ س' ، أ ص'] المتبادلتين داخليا متقايستان (حسب النظرية السابقة) .

أي $\widehat{\text{ع ب ص}} = \widehat{\text{س' أ ص'}}$.

الزاويتان [أ س' ، أ ص'] و [أ س ، أ ص] المتقابلتان بالرأس متقايستان .

أي : $\widehat{\text{س' أ ص'}} = \widehat{\text{س أ ص}}$.

لدينا : $\widehat{\text{ع ب ص}} = \widehat{\text{س' أ ص'}}$ و $\widehat{\text{س' أ ص'}} = \widehat{\text{س أ ص}}$.

نستنتج أن : $\widehat{\text{ع ب ص}} = \widehat{\text{س أ ص}}$.

فالزاويتان المتماثلتان [ب ع ، ب ص] ، [أ س ، أ ص] متقايستان .

- يمكن أن نثبت أيضا أن : أي زاويتين متماثلتين متقايستان .

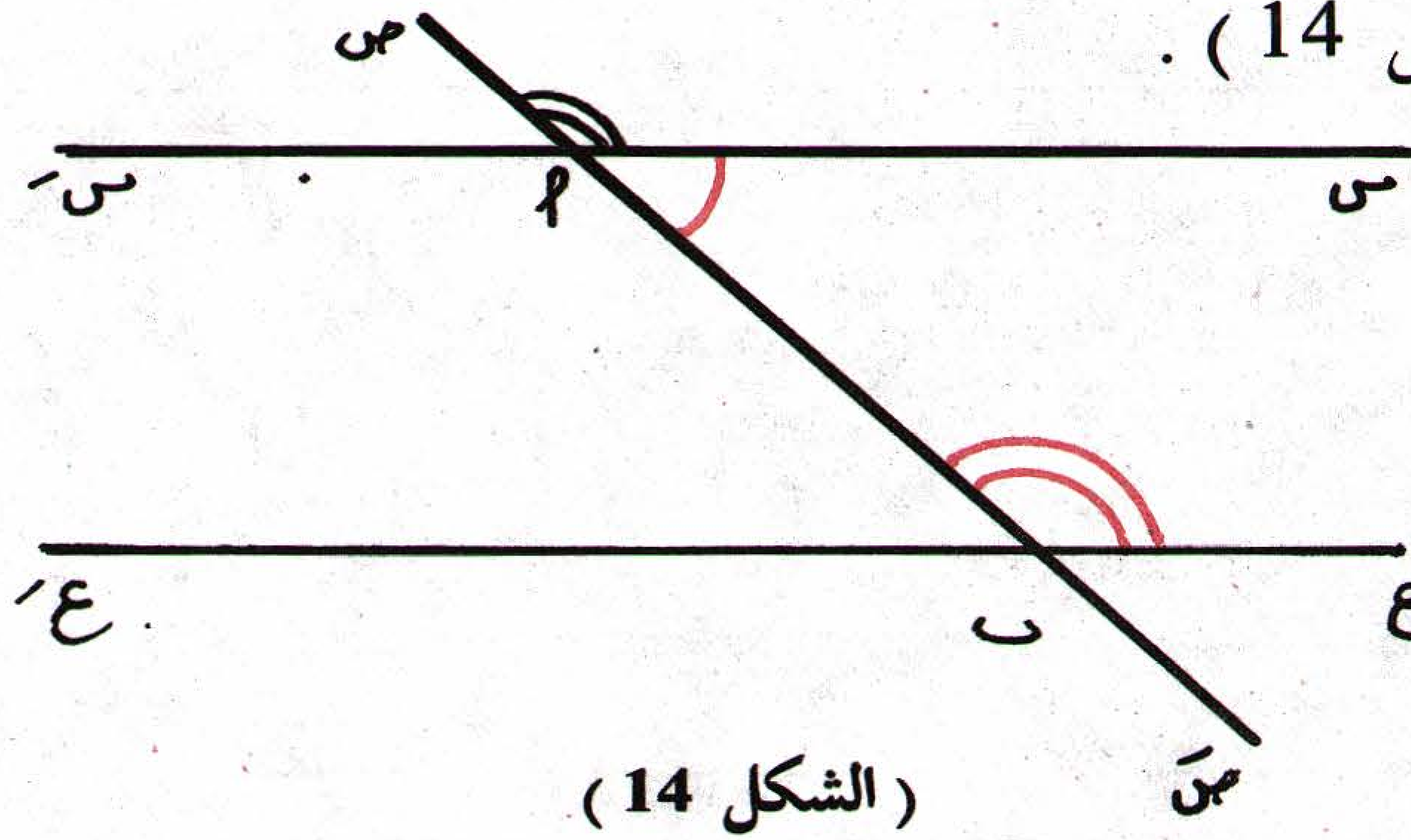
نشاط 3 :

1) لنبرهن على النظرية الآتية :

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ، فإن كل زاويتين داخليتين واقعتين في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع، متكاملتان .

البرهان :

نفرض (ص ص′) يقطع المستقيمين المتوازيين (س س′) و (ع ع′) في النقطتين أ ، ب . (الشكل 14) .



(الشكل 14)

ـ بما أن [أس ، أص] و [أس ، أص′] هما زاويتان متجاورتان واتحادهما هو الزاوية المستقيمة [أص ، أص′] ، فإن :

$\widehat{\text{س أ ص}} + \widehat{\text{س أ ص}'} = 180°$

ولكن $\widehat{\text{س أ ص}} = \widehat{\text{ع ب ص}}$ لأن الزاويتين المتماثلتين [أس ، أص] و [ب ع ، ب ص] متقايستان ، وبالتعويض نستنتج أن :

$\widehat{\text{ع ب ص}} + \widehat{\text{س أ ص}'} = 180°$.

فالزاويتان [ب ع ، ب ص] و [أس ، أص′] الداخليتان الواقعتان في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع (ص ص′) متكاملتان .

• يمكن أن نثبت أيضا أن أي زاويتين داخليتين واقعتين في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع (ص ص′) متكاملتان .

2) برهن على النظرية الآتية :

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ، فإن كل زاويتين خارجيتين واقعتين في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع متكاملتان .

من الأنشطة السابقة نستخلص ما يلي :

نظرية 1

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن :

1) كل زاويتين متبادلتين داخليا أو خارجيا متقايستان .

2) كل زاويتين متماثلتين متقايستان .

3) كل زاويتين داخليتين أو خارجيتين واقعتين في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع متكاملتان .

رأيت أن :

« المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر » .

ـ برهن على هذه النتيجة .

3 ـ الشروط الكافية لتوازي مستقيمين :

نشاط :

• لنبرهن على ما يلي :

يتوازى مستقيمان إذا قطعهما مستقيم وعيّن معهما زاويتين متبادلتين داخليا متقايستين .

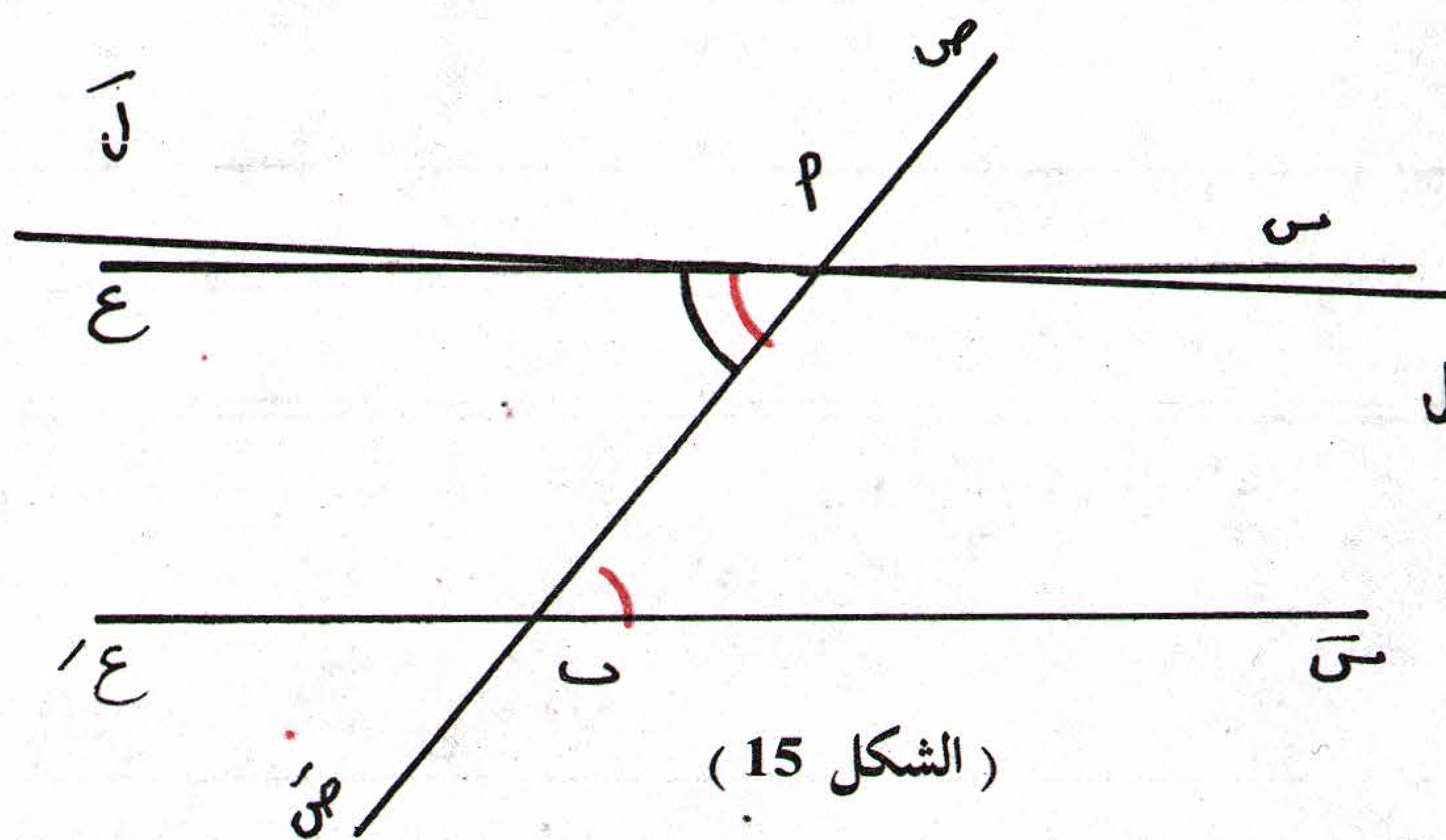
المعطيات :

نفرض أن (س ع) و (س′ع′) مستقيمان و (ص ص′) قاطع لهما في النقطتين ا ، ب بحيث : [ب س′ ، ب ص] ، [ا ص′ ، ا ع] متقايستان .

المطلوب : إثبات أن (س ع) ، (س′ع′) متوازيان .

البرهان :

– نرسم مستقيما (ل ل′) يوازي (س′ع′) ويشمل النقطة ا (الشكل 15)



(**الشكل 15**)

نعلم أن هذا المستقيم وحيد (بديهية إقليدس) .

بما أن (ص ص′) قاطع للمستقيمين المتوازيين (ل ل′) و (س′ع′) فالزاويتان المتبادلتان داخليا [ب س′ ، ب ص] و [ا ص′ ، ا ل′] متقايستان . وبما أن [ب س′ ، ب ص] و [ا ص′ ، ا ع] متقايستان (حسب المعطيات)

فإن : [ا ص′ ، ا ل′] و [ا ص′ ، ا ع] متقايستان .

هاتان الزاويتان المتقايستان مرسومتان في جهة واحدة بالنسبة إلى حامل ضلعهما المشترك [ا ص′ ، فحاملا ضلعيهما الآخرين [ا ل′ و [ا ع متطابقان ،

إذن (ل ل′) و (س ع) متطابقان .

نستنتج أن : (س ع) // (س′ع′) .

بصفة عامة يمكننا أن نبرهن على النظرية الآتية :

نظرية 2 :

لكي يتوازى مستقيمان مقطوعان بمستقيم آخر ، يكفي أن يتحقق أحد الشروط الآتية :
1) أن تكون زاويتان متبادلتان داخليا أو خارجيا متقايستين .
2) أو تكون زاويتان متماثلتان متقايستين .
3) أو تكون زاويتان داخليتان أو خارجيتان واقعتان في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع، متكاملتين .

هذه النظرية تُسمّى **النظرية العكسية** للنظرية 1 .

(س س′) ، (ع ع′) مستقيمان ، (ص ص′) قاطع لهما في النقطتين ا ، ب بحيث :
س ا ص = 50° ، ع′ ب ص = 130° .
برهن على أن (س س′) // (ع ع′) .

مسألة محلولة :

(س س′) و (ع ع′) مستقيمان متوازيان ، (ص ص′) قاطع لهما في النقطتين ا ، ب على الترتيب .
1) برهن على أن حاملي منصفي الزاويتين [ا س ، ا ب] ، [ب ا ، ب ع′] متوازيان .
2) برهن على أن حاملي منصفي الزاويتين [ا ب ، ا س′] ، [ب ا ، ب ع′] متعامدان .

المعطيات :

(س س′) // (ع ع′) و (ص ص′) ∩ (س س′) = { ا } .
و (ص ص′) ∩ (ع ع′) = { ب } .

المطلوب :

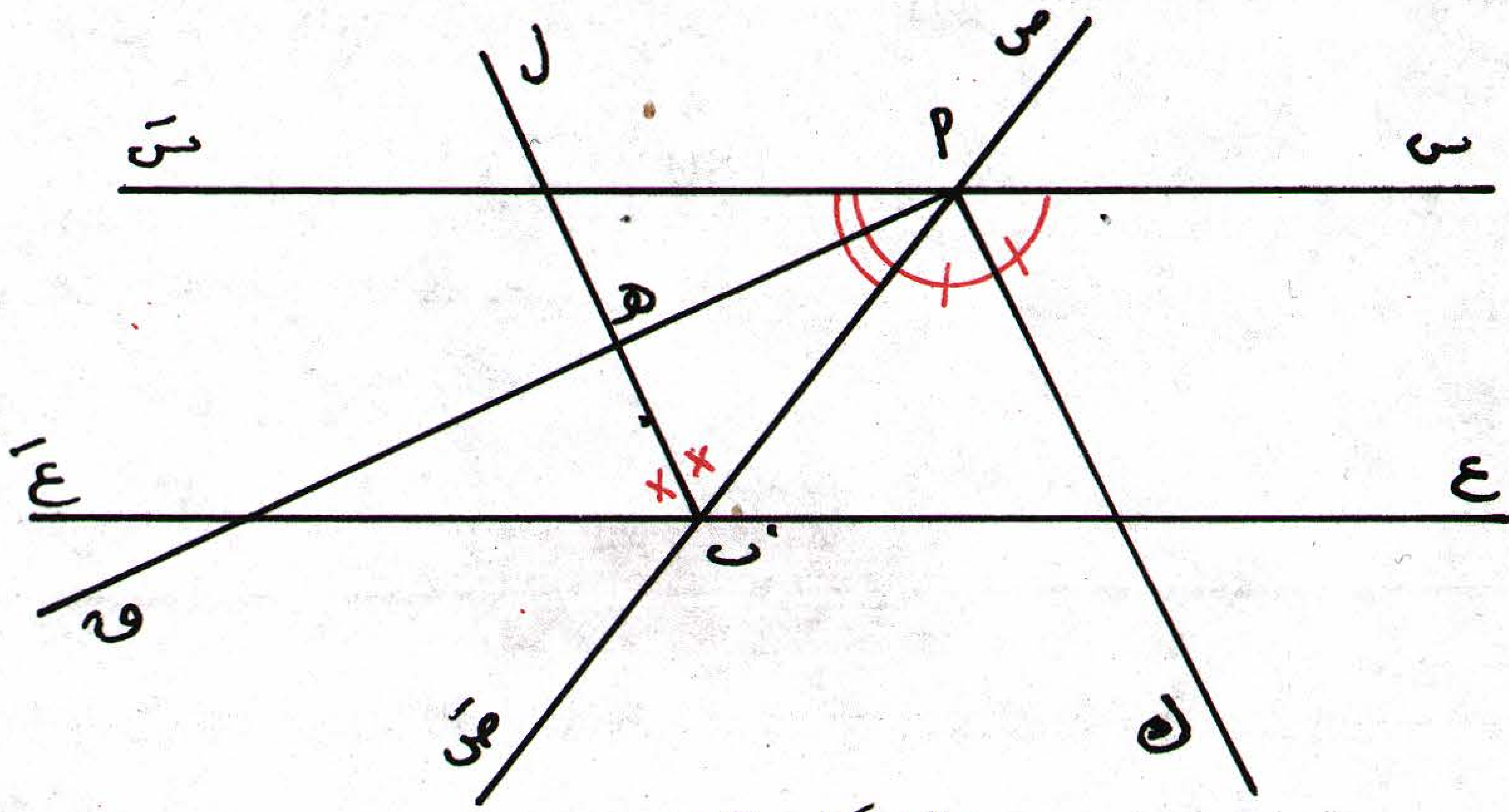
1) حاملا منصفي [اس ، اب] و [با ، بع′] متوازيان .

2) حاملا منصفي [اب ، اس′] و [با ، بع] متعامدان .

البرهان :

1) نرسم [اك منصف الزاوية [اس ، اب] .

و [بل منصف الزاوية [با ، بع′] . (الشكل 12)



(الشكل 12)

لدينا (س س′) // (ع ع′) و (ص ص′) قاطع لهما ؛ فالزاويتان [اب ، اس] و [با ، بع′] المتبادلتان داخليا متقايستان أي

با س = ا ب ع′ .

ومنه : $\frac{\text{ب ا س}}{2} = \frac{\text{ا ب ع}'}{2}$ أي : ب ا ك = ا ب ل .

بما أن الزاويتين [اب ، اك] ، [با ، بل] متبادلتان داخليا بالنسبة إلى المستقيمين (اك) ، (بل) والقاطع (اب) ،

فإن : (اك) // (بل) .

2) نرسم [أو منصف الزاوية [أ ب ، أ س'] يقطع [ب ل في النقطة هـ .

لدينا : $\widehat{\text{ب أ س'}} + \widehat{\text{أ ب ع'}} = 180°$ (لأن الزاويتين [أ ب ، أ س'] و [ب أ ، ب ع'] داخليتان وفي جهة واحدة بالنسبة إلى المستقيمين المتوازيين (س س') و (ع ع') والقاطع (أ ب) .

إذن : $\frac{\widehat{\text{ب أ س'}}}{2} + \frac{\widehat{\text{أ ب ع'}}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$

في المثلث أ ب هـ لدينا : $\widehat{\text{ب أ هـ}} + \widehat{\text{أ ب هـ}} = 90°$

لكن : $\widehat{\text{ب أ هـ}} + \widehat{\text{أ ب هـ}} + \widehat{\text{أ هـ ب}} = 180°$

نستنتج أن : $\widehat{\text{أ هـ ب}} = 90°$.

ومنه : (أ و) $\perp$ (ب ل) .

التمارين

1. م ، أ ، ب ثلاث نقط من المستقيم (س ع) بحيث م $\notin$ [أ ب] .
- عيّن نظير كل من [أ ع ، [ب س ، [أ ب] بالنسبة إلى م .

2. أ ، ب نقطتان من المستقيم (س ع) ، م نقطة لا تنتمي إلى (س ع) .
- عيّن نظير كل من [أ ع ، [ب س ، [أ ب] بالنسبة إلى م .

3. (و) ، (ك) مستقيمان متعامدان في م . ن نقطة بحيث ن $\notin$ (و) و ن $\notin$ (ك) .
- أنشئ ن' نظيرة ن بالنسبة إلى (و) . ثم ن'' نظيرة ن' بالنسبة إلى (ك) .
- أنشئ ن$_1$ نظيرة ن بالنسبة إلى (ك) . ثم ن$_2$ نظيرة ن$_1$ بالنسبة إلى (و) .
- ماذا تلاحظ عن ن$_2$ ، ن'' ؟
- ما هي نظيرة كل من ن ، ن$_1$ بالنسبة إلى النقطة م ؟

4. (و) ، (ك) مستقيمان متقاطعان ، ب نقطة بحيث ب $\notin$ (و) ، ب $\notin$ (ك) .
- أنشئ حـ نظيرة ب بالنسبة إلى (و) و ء نظيرة ب بالنسبة إلى (ك) .

ـ أنشىء القطعة [ى هـ] نظيرة [ب حـ] بالنسبة إلى (ك) .
1) هل القطعتان [ب حـ] ، [ى هـ] متناظرتان بالنسبة إلى (ف) ؟
2) ما هو نظير المثلث ب حـ ى بالنسبة إلى (ك) ؟
3) ما هو محور تناظر الرباعي هـ ى ب حـ ؟

5. م ، ا ، ب ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ، ﻫ منتصف [ا ب] .
عيّن النقط ا′ ، ب′ ، ﻫ′ نظائر النقط ا ، ب ، ﻫ على الترتيب بالنسبة إلى م .
1) بيّن أن (ا′ ب′) // (ا ب) .
2) عيّن منتصف [ا′ ب′] . علل إجابتك .

6. (ف) ، (ك) مستقيمان متعامدان في م . ﻫ نقطة بحيث ﻫ ∉ (ف) ، ﻫ ∉ (ك) .
ـ أنشىء ﻫ′ نظيرة ﻫ بالنسبة إلى (ف) ، ثم أنشىء ﻫ″ نظيرة ﻫ′ بالنسبة إلى (ك) .
برهن على أن :
1) (ﻫ ﻫ′) // (ك) .
2) (ﻫ ﻫ′) ⊥ (ﻫ′ ﻫ″) .

7. [م س ، م ع] زاوية قائمة ، ﻫ نقطة من هذه الزاوية حيث ﻫ ∉ [م س ، و ﻫ ∉ [م ع .
(ف) ، (ك) مستقيمان يشملان ﻫ ويعامدان حاملي [م س و [م ع على الترتيب .
1) برهن أن (ف) يوازي حامل [م ع وأن (ك) يوازي حامل [م س .
2) برهن أن (ف) ⊥ (ك) .

8. (س س′) ، (ع ع′) ، (ص ص′) مستقيمات متوازية و (ف ف′) قاطع لها في النقاط ا ، ب ، حـ حيث س ا ف = 25° .
ـ أحسب قيس كل من الزوايا الآتية :
1) [ا س ، ا ف′ [، [ب ع′ ، ب ف′ [، [ب ع ، ب ف [.
2) عيّن بطريقتين قيس كل زاوية رأسها حـ .

9. [م س ، م ع] ، [م′ س′ ، م′ ع′] زاويتان حيث حاملا [م س ، [م′ س′ متوازيان وحاملا [م ع ، [م′ ع′ متوازيان .
ـ برهن أن : س م ع = س′ م′ ع′ .

10. (ق) مستقيم. ا، ب، م ثلاث نقط من (ق) حيث م ∉ [ا ب]، ج منتصف [ا ب].

1) عيّن النقط ا′، ب′، ج′ بحيث تكون م هي منتصف كل من [ا ا′]، [ب ب′]، [ج ج′].

2) بيّن أن ج′ هي منتصف [ا′ ب′].

11. ا ب ح مثلث، [ا س منصف الزاوية [ا ب، ا ح].

1) المستقيم الذي يشمل النقطة ب ويوازي حامل [ا س يقطع (ا ح) في ء. برهن أن $\widehat{ا ب ء} = \widehat{ا ء ب}$.

2) المستقيم الذي يشمل النقطة ح ويوازي حامل [ا ب] يقطع (ب ء) في هـ. برهن أن $\widehat{ح ء هـ} = \widehat{ح هـ ء}$.

12. ا ب ح مثلث قائم في ا، النقطة م هي منتصف [ب ح].

(ق) هو المستقيم الذي يشمل م ويعامد (ا ب) في النقطة ء.

(ك) هو المستقيم الذي يشمل م ويعامد (ا ح) في النقطة هـ.

1) أثبت أن: (م ء) // (ا ح) وأن: (م هـ) // (ا ب).

2) أثبت أن: [م ء، م ب]، [م هـ، م ح] متتامتان وأن: (ق) ⊥ (ك).

13. [ا س، ا ع] زاوية ناتئة، [ا ص منصفها، ب نقطة من [ا س، ح نقطة من [ا ع].

- ارسم نصف المستقيم [ب ى حيث [ب ى ⊅ [ا س، ا ع] و $\widehat{ا ب ى} = \widehat{س ا ص}$.

- ارسم نصف المستقيم [ح ف حيث [ح ف ⊅ [ا س، ا ع] و $\widehat{ا ح ف} = \widehat{ع ا ص}$.

- برهن على أن حاملي [ب ى و [ح ف متوازيان.

14. (س س′)، (ع ع′) مستقيمان متوازيان (ص ص′) قاطع لهما.

1) برهن على أن حاملي منصفي زاويتين متبادلتين داخليا متوازيان.

2) برهن على أن حاملي منصفي زاويتين متماثلتين متوازيان.

3) ما هو الوضع النسبي لحاملي منصفي زاويتين داخليتين واقعتين في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع؟

15. (ق) ، (ك) مستقيمان متوازيان [ا ء] ، [ب ح] قطعتان مستقيمتان بحيث :

[ا ء] ⊂ (ق) ، [ب ح] ⊂ (ك) و ا ح = ب ء .

ـ عيّن محور تناظر للشكل ا ب ح ء .

لمحة تاريخية

. إقليدس هندسي يوناني يقال إنه عاش في الأسكندرية في القرن الثالث قبل الميلاد ، حلل المعلومات الهندسية السائدة في عصره ثم رتبها في صنفين :

البديهيات والنتائج (النظريات) .

« وحدانية المستقيم الموازي لمستقيم معلوم من نقطة معلومة » هي أشهر بديهيات إقليدس وعليها تنبني الهندسة التي ندرسها والتي تسمى الهندسة الإقليدية .

. هذه البديهية ظلت محل اهتمام الباحثين طيلة 2000 سنة تقريبا .

. الرياضي العربي ثابت بن قرة درس كتاب الأصول لإقليدس ونقله إلى العربية .

. والرياضي العربي نصر الدين الطوسي (القرن الثامن الميلادي) هو أول من برهن على النتيجة التي تنص على أن « مجموع أقياس زوايا مثلث هو قائمتان » تكافىء بديهية إقليدس التي تنص على أنه :

« إذا قطع مستقيم مستقيمين واقعين في نفس المستوى وكان مجموع قيسي الزاويتين الداخليتين الواقعتين في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع أصغر من قائمتين ، فإن المستقيمين يتقاطعان في هذه الجهة . »

2 مجموعة الأعداد الصحيحة

المجموعة ص .

1. العدد الصحيح :

يمثل الجدول الآتي نتائج مباريات فريق لكرة القدم مع فرق أخرى في دورة معينة حيث كل نتيجة تمثّل بثنائية مرتبة :

المباريات	النتيجة	نوع النتيجة	فرق الأهداف	التعبير عن هذه للنتيجة
المباراة الأولى	(2 ، 5)	إيجابية	5 − 2	(+3)
المباراة الثانية	(1 ، 3)	سلبية	3 − 1	(−2)
المباراة الثالثة	(2 ، 2)	متعادلة	2 − 2	0

• تعبر النتيجة (5 ، 2) عن فوز هذا الفريق **بزيادة** ثلاثة أهداف أي (+ 3) .
(+ 3) يسمى **عددا صحيحا موجبا** ونقرأه « زائد ثلاثة » .
الرمز + هو إشارة العدد الصحيح (+ 3) .

• أما النتيجة (1 ، 3) تعبّر عن انهزام هذا الفريق **بنقصان** هدفين أي (− 2) .
(− 2) يسمى **عددا صحيحًا سالبًا** ونقرأه « ناقص إثنان » .
والرمز − هو إشارة العدد الصحيح (− 2) .

• تعبّر النتيجة (2 ، 2) عن تعادل هذا الفريق ، فرق الأهداف هو 0 .
0 يسمى **العدد الصحيح المعدوم** .

ملاحظة :

تعتبر نتيجة التعادل إيجابية بالنسبة لفريق وسلبية بالنسبة للفريق الآخر.

تعريف :

• ا ، ب عددان طبيعيان . إن الثنائية المرتبة (ا ، ب) تمثّل عددًا صحيحًا :

• يكون هذا العدد موجبًا إذا كان ا > ب ونكتبه + (ا − ب)

• يكون هذا العدد سالبًا إذا كان ا < ب ونكتبه − (ب − ا)

• يكون هذا العدد معدومًا إذا كان ا = ب ونكتبه 0 .

إليك الجدول الآتي الذي يستعمله تاجر في دفتر حساباته .

ـ أكمل هذا الجدول حيث يعبّر عن موازنة اليوم بعدد صحيح :

اليوم	البيع ب	الشراء ش	موازنة اليوم (ب ، ش)	التعبير عن موازنة اليوم
السبت	4375	3874	(... ، ...)	...
الأحد	5432	6143	(... ، ...)	...
الإثنين	3479	3479	(... ، ...)	...
الثلاثاء	1142	...	(1142 ، ...)	(−50)
الأربعاء	...	...	(5672 ، 6622)	...
الخميس	...	3787	(... ، ...)	0

2. مجموعة الأعداد الصحيحة

كل من ($+3$) ، (-2) ، 0 ، (-17) ، ($+112$) هو عدد صحيح .

المجموعة { ... ، -3 ، -2 ، -1 ، 0 ، $+1$ ، ، $+2$ ، $+3$ ، ..... }

تسمى مجموعة **الأعداد الصحيحة** ونرمز إليها بالرمز ص .

نرمز **لمجموعة الأعداد الصحيحة** الموجبة **أو المعدومة** بالرمز ص+

نرمز **لمجموعة الأعداد الصحيحة** السالبة **أو المعدومة** بالرمز ص−

لاحظ أن : • ص+ ∪ ص− = ص • ص+ ∩ ص− = { 0 } .

• كل من ص ، ص+ ، ص− هي مجموعة غير منتهية .

3 . القيمة المطلقة لعدد صحيح .

القيمة المطلقة للعدد الصحيح ($+5$) ونرمز إليها بالرمز $|+5|$ هي العدد الطبيعي 5 ، وأيضا القيمة المطلقة للعدد الصحيح (-3) ونرمز إليها بالرمز $|-3|$ هي العدد الطبيعي 3 .

الرمز | | هو رمز القيمة المطلقة

نكتب : $|+5| = 5$. وأيضا : $|-3| = 3$ ، $|-5| = 5$

لاحظ أن : $|+7| = 7$ و $|-7| = 7$.

للعددين ($+7$) ، (-7) نفس القيمة المطلقة وإشارتان مختلفتان نقول إنهما **متعاكسان** .

• نصطلح على أن القيمة المطلقة للعدد الصحيح 0 تساوي 0

أي $|0| = 0$

ملاحظة :

العددان الصحيحان المتعاكسان هما عددان لهما نفس القيمة المطلقة وإشارتان مختلفتان .

اصطلاح : نرمز لمعاكس أ بالرمز –أ .

أمثلة : إذا كان أ = (+2) فإن –أ = –(+2) = (–2)

إذا كان أ = (–3) فإن –أ = –(–3) = (+3) .

- هل الكتابة (+أ) تدل على عدد صحيح موجب دائما ؟ أعط أمثلة .
- هل الكتابة (–ب) تدل على عدد صحيح سالب دائما ؟ أعط أمثلة .

تعريف :

القيمة المطلقة للعدد الصحيح أ ونرمز إليها بالرمز |أ|
تساوي أ إذا كان أ موجبا ،
وتساوي –أ إذا كان أ سالبا .

أي : **|أ| = أ إذا كان** أ $\in$ ص$^+$
|أ| = –أ إذا كان أ $\in$ ص$^-$

مثال : |+5| = (+5) ؛ |–3| = –(–3) = (+3) .

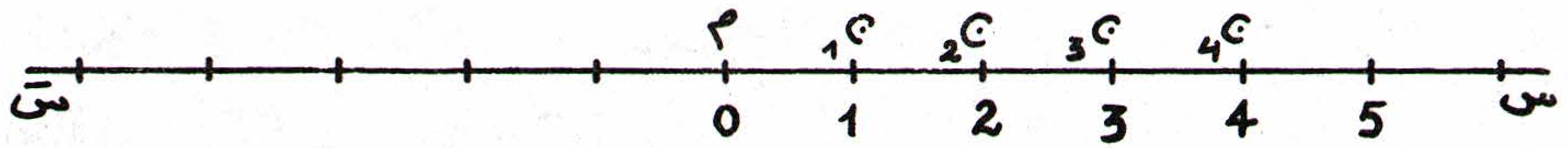
العدد |أ| موجب دائما

4 تمثيل المجموعة ص على مستقيم .

(س س′) مستقيم ، م نقطة منه .

تعلم أنه يمكن تدريج نصف المستقيم [م س باستخدام الأعداد الطبيعية 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، .... كما هو في الشكل (1) ،

حيث م ، $ه_1$ ، $ه_2$ ، $ه_3$ ، .... هي نقط هذا التدريج .



(الشكل 1)

• لنرفق النقط $ه_1$ ، $ه_2$ ، $ه_3$ ، ... بالأعداد الصحيحة الموجبة (+1) ، (+2) ، (+3) ، ..... على الترتيب .

اصطلاح :

كل من النقط $ه_1$ ، $ه_2$ ، $ه_3$ ، .... تمثّل عددا طبيعيًا أو عددًا صحيحًا موجبًا .

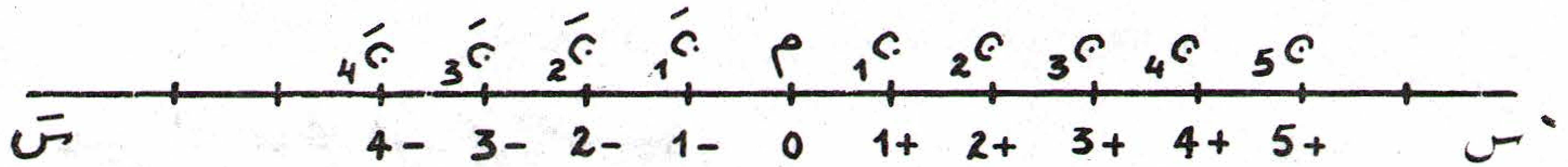
فنصطلح على أن 1 = +1 ، 2 = +2 ، 3 = +3 ، ...

بصفة عامة نقبل أن : $ط = ص^+$

• نسمي $ه'_1$ ، $ه'_2$ ، $ه'_3$ ، .... نظائر النقط $ه_1$ ، $ه_2$ ، $ه_3$ ، ..... بالنسبة إلى م على الترتيب .

• لنرفق النقط $ه'_1$ ، $ه'_2$ ، $ه'_3$ ، .... بالأعداد الصحيحة السالبة (−1) ، (−2) ، (−3) ، .... على الترتيب . والنقطة م بالعدد الصحيح المعدوم 0 .

فنحصل على الشكل (2) الذي يدلّ على **تمثيل المجموعة ص على المستقيم** (س سَ) .



(الشكل 2)

ملاحظة :

بما أن $ط = ص^+$ فإن $ط \subset ص$.

التَّمَــــارِيــــنُ

1. أوجد العدد الصحيح الذي تُمثِّله كل من الثنائيات المرتبة الآتية :
(5 ، 12) ؛ (17 ، 11) ؛ (0 ، 0) ؛ (7 ، 0) ؛ (3 ، 3) ؛ (11 ، 9) ؛
(0 ، 6) ؛ (14 ، 21) ؛ (7 ، 6) ؛ (4 ، 2) ؛ (15 ، 12) .
ـ عين القيمة المطلقة والإشارة لكل من هذه الأعداد الصحيحة .
عين من بين الثنائيات المرتبة السابقة التي تمثل نفس العدد الصحيح .

2. إليك الأعداد الصحيحة التالية :
(– 4) ، (+ 1) ، (+ 7) ، 0 ، (– 1) ، (+ 13) ، (– 6) .
ـ أوجد لكل عدد من هذه الأعداد ثلاث ثنائيات مرتبة تمثله .

3. عين في كل حالة العدد الطبيعي س حيث :
1) الثنائية المرتبة (س ، 5) تمثل العدد الصحيح 0 .
2) الثنائية المرتبة (7 ، س) تمثل العدد الصحيح + 4)
3) الثنائية المرتبة (س ، 12) تمثل العدد الصحيح (– 3) .
4) الثنائية المرتبة (3 ، س) تمثل العدد الصحيح (– 4) .

4. أكمل ما يلي :
|– 18| = ... ؛ |+ 18| = ... ؛ |– 13| = ... ؛ |0| = ...
15 هو القيمة المطلقة للعدد الصحيح ... وللعدد الصحيح ...

5. اكتب معاكس كل من الأعداد الصحيحة الآتية :
(+ 24) ؛ (– 15) ؛ (– 9) ؛ (+ 112) ؛ (– 1) .

الأعداد الصحيحة والمحيط

* تستعمل الأعداد الصحيحة للتعبير عن بعض الوضعيات من المحيط الذي نعيش فيه . في الجغرافيا يعبر عن الارتفاعات والانخفاضات بالنسبة إلى مستوى سطح البحر بأعداد صحيحة .

وقد اتفق على أن مستوى سطح البحر يرفق بالعدد الصحيح 0 .

ـ المرتفعات ترفق بأعداد صحيحة موجبة .

ـ المنخفضات ترفق بأعداد صحيحة سالبة .

* نعلم أن أعلى مكان في الجزائر هو قمة جبل أتا كور بالهقار الذي ارتفاعه بالنسبة إلى مستوى سطح البحر هو 2918 م ، يرفق هذا المرتفع بالعدد الصحيح (+ 2918) .

* ونعلم أن أخفض مكان في الجزائر هو شط مروان المجاور لشط ملغيغ الواقع بين بسكرة وتوقرت الذي انخفاضه بالنسبة إلى مستوى سطح البحر هو 35 م فيرفق هذا المنخفض بالعدد الصحيح (− 35) .

* لا شك أنك رأيت من خلال نشرة الأحوال الجوية أن درجات الحرارة في بعض المدن تعطى باستخدام أعداد صحيحة موجبة وفي مدن أخرى تعطى باستخدام أعداد صحيحة سالبة .

3 الجمع والطرح والترتيب في ص

الجمع في ص

1. مجموع عددين صحيحين :

1) مجموع عددين صحيحين موجبين :

يعبر الجدول الآتي عن موازنة تاجر يوم السبت :

السبت	المدخول م	المصروف ص	الموازنة (م ، ص)	العدد الصحيح
الصباح	1270	1200	(1270 ، 1200)	(+70)
المساء	700	650	(700 ، 650)	(+50)
اليوم	1970	1850	(1970 ، 1850)	(+120)

تجد أن :

ـ مدخول الصباح يُمثَّل بالعدد الصحيح الموجب (+ 70) .

ـ ومدخول المساء يُمثَّل بالعدد الصحيح الموجب (+ 50) .

ـ ومدخول اليوم يُمثَّل بالعدد الصحيح الموجب (+ 120)

نقول إن العدد الصحيح الموجب (+ 120) هو **مجموع** العددين الصحيحين الموجبين (+ 70) و (+ 50)

ونكتب : (+70) + (+ 50) = (+ 120) .

لاحظ أن : | + 120 | = | + 70 | + | + 50 | .

تعريف :

مجموع عددين صحيحين موجبين هو العدد الصحيح الموجب الذي قيمته المطلقة هي مجموع القيمتين المطلقتين لها .

2) مجموع عددين صحيحين سالبين :

يعبر الجدول الآتي عن موازنة يوم الأحد :

الأحد	المدخول م	المصروف ص	الموازنة (م ، ص)	العدد الصحيح
الصباح	2470	2540	(2540 ، 2470)	(70−)
المساء	875	905	(905 ، 875)	(30−)
اليوم	3345	3445	(3445 ، 3345)	**(100−)**

نجد أن :

ـ مدخول الصباح يُمثَّل بالعدد الصحيح السالب (− 70) .

ـ ومدخول المساء يُمثَّل بالعدد الصحيح السالب (− 30) .

ـ ومدخول اليوم يُمثَّل بالعدد الصحيح السالب **(− 100)** .

العدد الصحيح السالب (− 100) هو **مجموع** العددين الصحيحين السالبين (− 70) و (− 30) .

نكتب (− 70) + (− 30) = (− 100)

لاحظ أن : | − 100 | = | − 70 | + | − 30 |

تعريف :

مجموع عددين صحيحين سالبين هو العدد الصحيح السالب الذي قيمته المطلقة هي مجموع القيمتين المطلقتين لهما .

3) مجموع عددين صحيحين مختلفين في الإشارة :

يعبر الجدول الآتي عن موازنة يوم الإثنين :

الإثنين	المدخول م	المصروف ص	الموازنة (م ، ص)	العدد الصحيح
الصباح	1386	1297	(1386 ، 1297)	(+89)
المساء	1913	1951	(1913 ، 1951)	(−38)
اليوم	3299	3248	(3299 ، 3248)	(+51)

يُمثّل العدد (+89) موازنة الصباح

ويمثل العدد (−38) موازنة المساء

ويمثل العدد (+51) موازنة يوم الإثنين .

ـ العدد الصحيح الموجب (+51) هو **مجموع** العددين الصحيحين المختلفين في الإشارة (+89) و (−38) .

نكتب : (+89) + (−38) = (+51)

لاحظ أن : 89 − 38 = 51 أي | +89 | − | −38 | = | +51 | ..

يعبر الجدول الآتي عن موازنة يوم الثلاثاء :

الثلاثاء	المدخول م	المصروف ص	الموازنة (م ، ص)	العدد الصحيح
الصباح	2174	2268	(2174 ، 2268)	(-94)
المساء	1958	1910	(1958 ، 1910)	(+48)
اليوم	4132	4178	(4132 ، 4178)	(-46)

يُمثّل العدد (– 94) موازنة الصباح .

ويمثل العدد (-- 48) موازنة المساء .

ويمثل العدد (– 46) موازنة يوم الثلاثاء .

العدد الصحيح السالب (– 46) هو **مجموع** العددين الصحنحين المختلفين في الإشارة (– 94) و (+ 48)

نكتب : (– 94) + (+ 48) = (– 46)

لاحظ أن : 94 – 48 = 46 أي | – 94 | – | + 48 | = | – 46 | .

تعريف :

مجموع عددين صحيحين مختلفين في الإشارة هو العدد الصحيح الذي قيمته المطلقة هي فرق القيمتين المطلقتين لها ، وإشارته هي إشارة أكبرهما بالقيمة المطلقة .

ملاحظة :

مجموع عددين صحيحين متعاكسين هو العدد الصحيح المعدوم

خلاصة :

- **مجموع عددين صحيحين من نفس الإشارة هو العدد الصحيح الذي قيمته المطلقة هي مجموع قيمتيها المطلقتين . وإشارته هي إشارتهما المشتركة .**
- **مجموع عددين صحيحين مختلفين في الإشارة هو العدد الصحيح الذي قيمته المطلقة هي فرق قيمتيها المطلقتين ، وإشارته هي إشارة أكبرهما بالقيمة المطلقة .**

نرمز إلى مجموع العددين الصحيحين ا ، ب بالرمز ا + ب

ا ، ب هما حدا هذا المجموع .

2. الجمع في ص :

لاحظ الجدول وأكمله بإيجاد المجموع ا + ب حيث (ا . ب) ثنائية مرتبة من ص × ص .

الثنائية (ا ، ب)	المجموع ا+ب	الثنائية (ا ، ب)	المجموع ا-ب
(3+ ، 5+)	(8+)	(15- ، 12+)	(3-)
(2- ، 7-)	...	(21+ ، 24-)	...
(4 - ، 6 -)	(10-)	(0 ، 10-)	...
(4- ، 14+)	...	(1- ، 13+)	...

لاحظ في هذا الجدول أننا أرفقنا كل ثنائية مرتبة (ا ، ب) من ص × ص بالعدد الصحيح الوحيد (ا + ب).

بصفة عامة :

إذا أرفقنا كل ثنائية مرتبة (ا ، ب) من ص × ص بالمجموع (ا – ب) فنعرف تطبيقا من ص × ص إلى ص نسميه **الجمع** في ص .

تعريف :

التطبيق من ص×ص إلى ص الذي يرفق كل ثنائية مرتبة (أ ، ب) بالمجموع (أ+ب) يسمى عملية الجمع في ص.

نرمز لعملية الجمع بالرمز +

نكتب : ص × ص ← ص

(أ ، ب) ↤ أ + ب

1) احسب ما يلي :

$(+3)+(+9)$ ؛ $(-12)+(+7)$ ؛ $(+18)+(-5)$ ؛

$(+9)+(-9)$ ؛ $0+(-3)$ ؛ $(+2)+0$ ؛ $(-7)+(-7)$.

2) ما هي صورة كل من الثنائيات المرتبة الآتية بواسطة الجمع في ص ؟ :

$(+4$ ، $-8)$ ؛ $(-12$ ، $+4)$ ؛ $(-6$ ، $+7)$ ؛ $(-9$ ، $0)$ ؛

$(+5$ ، $-5)$

3. خواص الجمع في ص :

1) التبديل :

ـ احسب كلا من : $(-7)+(-5)$ و $(-5)+(-7)$

تجد أن : $(-7)+(-5)=(-5)+(-7)$

ـ احسب كلا من : $(+7)+(-12)$ و $(-12)+(+7)$

تجد أن : $(+7)+(-12)=(-12)+(+7)$

بصفة عامة :

مهما يكن العددان الصحيحان أ ، ب فإن :
أ + ب = ب + أ

نقول إن الجمع في ص عملية **تبديلية** .

2) التجميع :

ـ احسب $(-12) + (+8)$ ثم $[(-12) + (+8)] + (-5)$.

ـ احسب $(+8) + (-5)$ ثم $(-12) + [(+8) + (-5)]$

تجد أن :

$$[(-12) + (+8)] + (-5) = (-12) + [(+8) + (-5)]$$

بصفة عامة :

مهما تكن الأعداد الصحيحة أ ، ب ، ح فإن :
(أ + ب) + ح = أ + (ب + ح) .

نقول إن الجمع في ص عملية **تجميعية** .

ملاحظة :

نكتب أيضا : أ + (ب + ح) = (أ + ب) + ح = أ + ب + ح

احسب $(-5) + (+8) + (+5)$ بطريقتين مختلفتين

3) العنصر الحيادي :

ـ احسب كلا من $(-7) + 0$ و $0 + (-7)$.

تجد أن : $(-7) + 0 = 0 + (-7)$

بصفة عامة :

مهما يكن العدد الصحيح ا فإن :
ا + 0 = 0 + ا = ا

نقول إن العدد الصحيح 0 هو **العنصر الحيادي** بالنسبة إلى عملية الجمع في ص .

4) نظير عدد صحيح :

(+ 18) و (− 18) هما عددان صحيحان متعاكسان .
تعلم أن مجموع عددين صحيحين متعاكسين هو العدد الصحيح المعدوم 0 أي :
(+ 18) + (− 18) = 0 .
نقول إن العددين (+ 18) و (− 18) متناظران بالنسبة إلى عملية الجمع في ص .

بصفة عامة :

لكل عدد صحيح ا نظير بالنسبة إلى عملية الجمع في ص هو معاكسه (− ا) .

أي :

مهما يكن العدد الصحيح ا فإن :
ا + (− ا) = (− ا) + ا = 0

خلاصة :

عملية الجمع في ص تبديلية وتجميعية والعدد الصحيح 0 هو العنصر الحيادي بالنسبة إلى هذه العملية ، ولكل عنصر من ص نظير بالنسبة إلى عملية الجمع في ص هو معاكسه .

5) المساواة والجمع :

• نقبل ما يلي :

> **أ ، ب ، ج ثلاثة أعداد صحيحة ،**
> **إذا كان أ = ب فإن أ + ج = ب + ج**

أي : إذا أضفنا نفس العدد الصحيح إلى عددين صحيحين متساويين نحصل على عددين صحيحين متساويين .

• **مسألة :**

أ ، ب ، ج ثلاثة أعداد صحيحة حيث أ + ج = ب + ج لنبرهن أن أ = ب .

البرهان :

لدينا أ + ج = ب + ج (حسب المعطيات)

بإضافة العدد الصحيح (−ج) إلى كل من (أ + ج) و (ب + ج)

نحصل على عددين صحيحين متساويين (حسب النتيجة السابقة)

أي : [أ + ج] + (−ج) = [ب + ج] + (−ج)

ومنه أ + [ج + (−ج)] = ب + [ج + (−ج)] لأن الجمع في ص تجميعي .

إذن أ + 0 = ب + 0 لأن ج و (−ج) متناظران بالنسبة إلى الجمع في ص

ومنه أ = ب لأن الصفر عنصر حيادي بالنسبة إلى عملية الجمع في ص .

نظرية :

> **أ ، ب ، ج ثلاثة أعداد صحيحة .**
> **إذا كان أ + ج = ب + ج فإن أ = ب**

4. معاكس مجموع :

أ ، ب عددان صحيحان .

لنبرهن أن معاكس (أ + ب) أي – (أ + ب) هو (– أ – ب) .

البرهان :

نعلم أن مجموع عددين صحيحين متعاكسين هو العدد الصحيح المعدوم .

فلكي نبرهن أن معاكس (أ + ب) = (– أ – ب)

يكفي أن نتحقق أن المجموع (أ + ب) + (– أ – ب) = 0 .

لنحسب المجموع م = (أ + ب) + (– أ – ب)

م = (أ + ب) + [(– أ) + (– ب)]

م = [أ + (– أ)] + [ب + (– ب)] لأن الجمع في ص عملية تبديلية وتجميعية

ولكن أ + (– أ) = 0 ، ب + (– ب) = 0

إذن : م = 0 .

هذا يعني أن العددين (أ + ب) و (– أ – ب) متعاكسان .

نكتب – (أ + ب) = – أ – ب

مثال : لنحسب بطريقتين معاكس المجموع (– 12) + (+ 4)

أي :

– [(– 12) + (+ 4)]

1) [(– 12) + (+ 4)] = (– 8) = (+ 8) .

2) [(– 12) + (+ 4)] = (– 12) (+ 4)

[(– 12) + (+ 4)] = (+ 12) + (– 4) = (+ 8) .

احسب بطريقتين كلا من :

$-[(+13)+(+9)]$ و $-[(-17)+(-7)]$.

الطرح في ص

1. فرق عددين صحيحين :

مسألة : أ ، ب عددان صحيحان .

هل يمكن إيجاد عدد صحيح ف بحيث ف + ب = أ ؟

البرهان :

1) نعلم أنه إذا كان ف + ب = أ فإن :

(ف + ب) + (− ب) = أ + (− ب)

وبما أن الجمع في ص عملية تجميعية ،

فإن : ف + [ب + (− ب)] = أ + (− ب)

ومنه ف + 0 = أ + (− ب) أي ف = أ + (− ب) .

نلاحظ أن العدد الصحيح ف الذي نبحث عنه هو المجموع

[أ + (− ب)]

2) لنبين أن العدد ف الذي يساوي [أ + (− ب)] يحقق المساواة

ف + ب = أ

لدينا ف + ب = [أ + (− ب)] + ب

ومنه ف + ب = أ + [(− ب) + ب] لأن الجمع في ص عملية تجميعية .

أي ف + ب = أ + 0 لأن (− ب) و ب متعاكسان .

أي ف + ب = أ لأن الصفر عنصر حيادي بالنسبة إلى الجمع في ص .

• إنَّ العدد الصحيح ف = أ + (− ب) هو العدد الصحيح الوحيد بحيث ف + ب = أ . ويسمى **فرق** العددين الصحيحن أ ، ب :

تعريف :

فرق عددين صحيحين ا ، ب هو مجموع العددين الصحيحين ا ومعاكس ب .

نرمز لفرق العددين الصحيحين ا ، ب بالرمز ا − ب .

نكتب : ا − ب = ا + (− ب)

فرق ← إضافة معاكس ب

ا − ب = ا + (− ب)

أمثلة

الفرق ⟷ **إضافة المعاكس**

(+7) − (+3) = (+7) + (−3) = (+4)

(+5) − (−8) = (+5) + (+8) = (+13)

1) احسب ما يلي :

(+3) − (+8) ؛ (−25) − (−13) ؛ (+9) − (−17) ؛

(−15) − (+18) ؛ (−36) − (−23) ؛ (+7) − (−22) ؛

(+11) − (+6) .

2) ا ، ب عددان صحيحيان متساويان أي ا = ب . برهن أن ا − ب = 0 .

2. الطرح في ص :

أوجد ا − ب فرق العددين الصحيحين ا ، ب في كل من الحالات الآتية :

ا = (+5) و ب = (+3) ؛ ا = (+7) و ب = (−9) ؛

ا = (−3) و ب = (+12) ؛ ا = (−17) و ب = (+17) .

بصفة عامة : يمكن أن نرفق كل ثنائية مرتبة (أ ، ب) من ص × ص **بالعدد الصحيح (أ − ب) ، فيتعين لدينا تطبيق من ص × ص إلى ص ، نسميه الطرح في ص .**

تعريف :

التطبيق من ص × ص إلى ص الذي يرفق كل ثنائية مرتبة (أ ، ب) بالفرق أ − ب يسمى عملية الطرح في ص .

نرمز لعملية الطرح في ص بالرمز

ونكتب : ص × ص ← ص

(أ ، ب) ↤ أ − ب

1) احسب كلا من :

(+ 18) − (+ 19) و (+ 19) − (+ 18) . ماذا تستنتج ؟

(− 15) − (− 24) و (− 24) − (− 15) . ماذا تستنتج ؟

ـ هل الطرح في ص عملية تبديلية ؟

2) عيّن صورة كل من الثنائيات المرتبة بواسطة الطرح في ص :

(+ 3 ، + 4) ؛ (6) ؛ (+ 12 ، 0) ، (0 ، − 12) ، (− 8 ، + 8) .

3) احسب كلا من :

(− 7) − [(− 3) − (− 12)] و [(− 7) − (− 3)] − (− 12) .

ماذا تستنتج ؟

[(+ 4) − (+ 11)] − (− 8) و (+ 4) − [(+ 11) − (− 8)] .

ماذا تستنتج ؟

ـ هل الطرح في ص عملية تجميعية ؟

4) احسب كلا من :

(+ 5) − 0 و 0 − (+ 5) . ماذا تستنتج ؟

0 − (− 7) و (7) − 0 . ماذا تستنتج ؟

3. المساواة والطرح :

مسألة 1 : أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد صحيحة حيث أ = ب

• لنبرهن أن أ − حـ = ب − حـ .

البرهان :

بما أن أ = ب فإن أ + (− حـ) = ب + (− حـ)

أي أ − حـ = ب − حـ .

نظرية :

أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد صحيحة
إذا كان أ = ب فإن أ − حـ = ب − حـ .

• برهن على النظرية الآتية :

أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد صحيحة ،
إذا كان أ − حـ = ب − حـ فإن أ = ب

مسألة 2 : أ ، ب ، حـ ، ء أربعة أعداد صحيحة حيث أ = ب و حـ = ء .

لنبرهن أن أ − حـ = ب − ء

البرهان :

بما أن أ = ب فإن أ − حـ = ب − حـ (حسب النظرية السابقة) .

لكن حـ = ء

إذن أ − حـ = ب − ء .

نظرية :

أ ، ب ، حـ ، ء أربعة أعداد صحيحة ،
إذا كان أ = ب و حـ = ء فإن أ − حـ = ب − ء

4. معاكس فرق :

أ ، ب عددان صحيحان .

لنبرهن أن معاكس (أ − ب) أي − (أ − ب) هو (− أ + ب)

لإثبات ذلك يكفي أن نبرهن أن المجموع (أ − ب) + (− أ + ب) = 0

لنحسب المجموع ل = (أ − ب) + (− أ + ب)

ل = [أ + (− ب)] + [(− أ) + ب]

ل = [أ + (− أ)] + [(− ب) + ب] لأن الجمع في ص عملية تبديلية وتجميعية ومنه :

ل = 0 .

وهذا يعني أن العددين (أ − ب) و (− أ + ب) متعاكسان .

نكتب : − (أ − ب) = (− أ + ب)

مثال : لنحسب معاكس الفرق (+ 22) − (− 13) أي :

− [(+ 22) − (− 13)] .

بطريقتين .

1) − [(+ 22) − (− 13)] = − [(+ 22) + (+ 13)] = − (+ 35)

= (− 35)

2) − [(+ 22) − (− 13)] = − (+ 22) + (− 13)

= (− 22) + (− 13) = (− 35)

أحسب بطريقتين :

− [(− 18) − (− 16)] ؛ − [(− 15) − (+ 9)] ؛

− [(+ 7) − (+ 12)] ؛ − [(+ 13) − (− 21)] .

الترتيب في ص

1. ترتيب الأعداد الصحيحة الموجبة

رأيت أن الأعداد الطبيعية ترتب تصاعديا كما يلي :

$\ldots\ldots > 4 > 3 > 2 > 1 > 0$

وترتب تنازليا كما يلي : $\ldots\ldots > 4 < 3 < 2 < 1 < 0$

وتعلم أن ط = ص+

فالأعداد الصحيحة الموجبة ترتب أيضا ترتيبا تصاعديا كما يلي :

$\ldots\ldots > 4+ > 3+ > 2+ > 1+ > 0$

وترتب ترتيبا تنازليا كما يلي : $\ldots\ldots > 4+ < 3+ < 2+ < 1+ < 0$.

نتيجة :

ترتب الأعداد الصحيحة الموجبة بنفس ترتيب الأعداد الطبيعية

- العدد الصحيح المعدوم 0 أصغر من أي عدد صحيح موجب .

2. العلاقة « ... > .... » والعلاقة « ... < ... » في ص :

أ ، ب عددان صحيحان . أكمل الجدول الآتي :

أ	(5+)	(7+)	(7+)	(2+)	(11+)	(8–)	0	0	(6–)	(10–)
ب	(3+)	(2+)	0	(7+)	(8–)	(8+)	(9–)	(15+)	(6–)	(1+)
أ–ب	(2+)			(5–)						
أ–ب	موجب			سالب						

تلاحظ أنه :

إذا كان ا ، ب عددين صحيحين فإن الفرق (ا − ب) هو عدد صحيح موجب أو عدد صحيح سالب أو عدد صحيح معدوم .

تعريف :

ا ، ب عددان صحيحان مختلفان :
• نقول إن ا أكبر من ب ونكتب ا > ب إذا كان الفرق (ا − ب) موجبا
• نقول إن ا أصغر من ب ونكتب ا < ب إذا كان الفرق (ا − ب) سالبا

نتيجة :

مهما يكن العددان الصحيحان المختلفان ا ، ب فإنه يمكن **مقارنتهما** بإحدى العلاقتين « ... < ... » أو « ... > ... » .
أي إما ا > ب وإما ا < ب .
• كل من الكتابتين ا > ب ، ا < ب تسمى متباينة .

ا ، ب ، ج أعداد صحيحة مختلفة :
إذا كان ا < ب و ب < ج فإن ا < ج .

3. العلاقة « ... ⩽ ... » في ص :

لاحظ أنه إذا كان ا − ب = 0 فإن ا = ب .
بصفة عامة :
مهما يكن العددان الصحيحان ا ، ب فإن :
ا > ب أو ا < ب أو ا = ب

تعريف :

نقول إن ا أصغر من ب أو يساويه ونكتب ا ⩽ ب
إذا كان ا < ب أو ا = ب .

العلاقة : « ... ⩽ ... » تسمى **علاقة ترتيب** في ص .

ملاحظة :

يمكن أن نعرف في ص العلاقة « ... أكبر من أو يساوي ... »
كما يلي :

ا ، ب عددان صحيحان
نقول إن ا **أكبر من** ب أو يساويه **ونكتب** ا ⩾ ب
إذا كان : ا > ب أو ا = ب

العلاقة « ... ⩾ ... » تسمى أيضا **علاقة ترتيب** في ص .

ملاحظة :

ا ، ب ، حـ أعداد صحيحة :
إذا كان ا ⩽ ب و ب ⩽ حـ فإن ا ⩽ حـ .

4. مقارنة الأعداد الصحيحة :

1) مقارنة عددين صحيحين موجبين :

ا ، ب عددان صحيحان موجبان . أكمل الجدول الآتي :

أ	(9+)	(4+)	(7+)	0	(6+)
ب	(5+)	(2+)	(11+)	(2+)	0
مقارنة |أ|، |ب|	|5+|<|9+|				
مقارنة أ ، ب	(5+)<(9+)				

لاحظ أن العددين الصحيحين الموجبين يرتبان بنفس ترتيب قيمتيهما المطلقتين .

نتيجة :

أ ، ب عددان صحيحان موجبان مختلفان ،
|أ| > |ب| معناه أ > ب

2) مقارنة عددين صحيحين سالبين :

أ ، ب عددان صحيحان سالبان . أكمل الجدول الآتي :

أ	(7−)	(9−)	(3−)	0	(5−)	(9−)
ب	(3−)	(5−)	(8−)	(4−)	0	(1−)
مقارنة |أ|، |ب|	|3−|<|7−|					
أ − ب	(4−)					
مقارنة أ ، ب	(3−)>(7−)					

لاحظ أن العددين الصحيحين السالبين يرتبان بعكس ترتيب قيمتيهما المطلقتين .

نتيجة :

أ ، ب عددان صحيحان سالبان مختلفان ،
|أ| > |ب| معناه أ < ب

ملاحظات :

- العدد الصحيح المعدوم 0 أصغر من أي عدد صحيح موجب
- العدد الصحيح المعدوم 0 أكبر من أي عدد صحيح سالب .

3) مقارنة عددين صحيحين مختلفين في الإشارة :

ا عدد صحيح موجب و ب عدد صحيح سالب .

تعلم أن ب < 0 وأن 0 < ا إذن ب < ا

انتيجة :

كل عدد صحيح سالب أصغر من أي عدد صحيح موجب

1) رتب تنازليًا الأعداد الصحيحة الآتية :

(− 7) ، (+ 4) ، (+ 3) ، (− 1) ، (+ 2) ، 0 ، (+ 100) ، (− 150) .

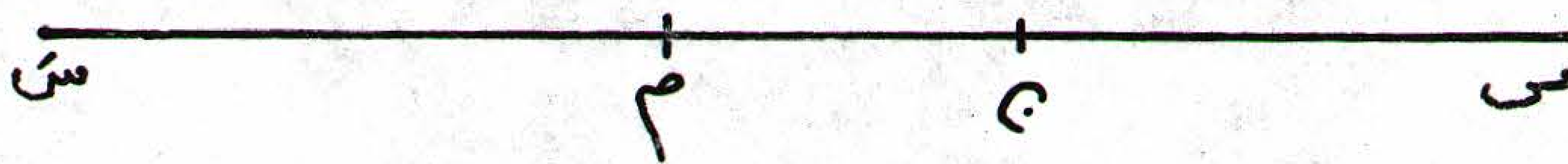
2) رتب تصاعديا الأعداد الصحيحة الآتية :

(+ 6) ، (− 15) ، (+ 1) ، 0 ، (− 10) ، (− 19) ، (+ 20) ، (− 25) .

5. الترتيب والتدريج ومفهوم المحور :

1) توجيه مستقيم :

(س سَ) مستقيم ؛ م ، ه نقطتان مختلفتان من (س سَ) . (الشكل 1) .



(الشكل 1)

الثنائية (م ، ن) تختلف عن الثنائية (ن ، م) .

• الثنائية (م ، ن) تعيّن الإتجاه من م نحو ن .

• الثنائية (ن ، م) تعيّن الإتجاه من ن نحو م .

فكل من (م ، ن) و (ن ، م) تعيّن إتجاها على المستقيم (س س′) .

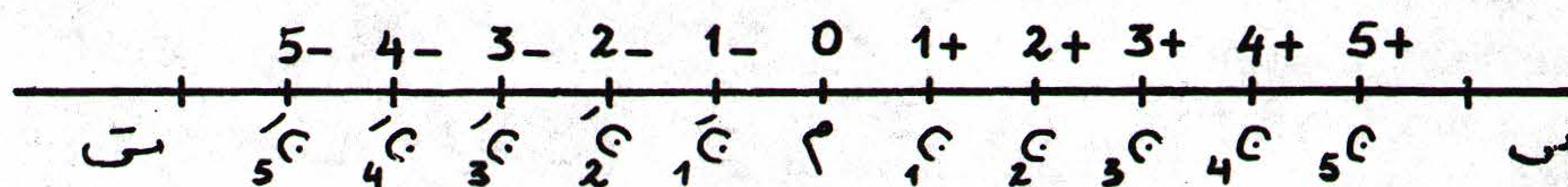
لاحظ أن هذين الإتجاهين متعاكسان وهما الإتجاهان الوحيدان الممكنان على المستقيم (س س′) .

2) مفهوم المحور :

تعلم أن الأعداد الصحيحة ترتب تصاعديا كما يلي :

$$\dots < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < \dots$$

(س س′) مستقيم مدرج بالأعداد الصحيحة كما في الشكل (2)



(الشكل 2)

نختار النقطة م كمبدأ لهذا التدريج ، والطول م $ن_1$ كوحدة له .

نتفق على أن :

• الإتجاه المعيّن بالثنائية المرتبة (م ، $ن_1$) هو **الإتجاه الموجب** للمستقيم (س س′) .

• الإتجاه المعاكس هو **الاتجاه السالب** للمستقيم (س س′) .

المستقيم (س س′) **الموجه** والمرفق بهذا التدريج يسمى **محورًا** .

• على هذا المحور ، كل عدد صحيح يسمى **فاصلة النقطة** الممثِّلة له .

مثلا العدد 0 هو **فاصلة** المبدأ م ونكتب م (0)

والعدد (1+) هو **فاصلة** النقطة $ن_1$ ونكتب $ن_1$ (1+)

والعدد (2−) هو **فاصلة** النقطة $ن'_2$ ونكتب $ن'_2$ (2−)

(س س′) محور :

1) عيّن فاصلة كل من النقط $ه_4$ ، $ه_6$ ، $ه'_3$ ، $ه'_4$ ، $ه'_6$.

2) عيّن على المستقيم (س س′) النقط التي فواصلها

(+2) ، (−2) ، (+5) ، (−7) .

3) عيّن منتصف كل من القطع

[م $ه_2$] ، [$ه_1$ $ه'_1$] ، [$ه_3$ $ه'_3$] .

6. الجمع والترتيب في ص :

مسألة : ا ، ب ، حـ ثلاثة أعداد صحيحة حيث ا ≤ ب .

لنبرهن أن ا + حـ ≤ ب + حـ .

البرهان :

نعْلمُ أن ا ≤ ب معناه (ا − ب) ∈ ص⁺ .

لنبيّن أن الفرق (ا + حـ) − (ب + حـ) ينتمي إلى ص⁺ .

(ا + حـ) − (ب + حـ) = (ا + حـ) + [− (ب + حـ)] (حسب تعريف الفرق)

(ا + حـ) − (ب + حـ) = (ا + حـ) + (− ب − حـ)

(ا + حـ) − (ب + حـ) = (ا + حـ) + [(− ب) + (− حـ)]

(ا + حـ) − (ب + حـ) = ا + حـ + (− ب) + (− حـ)

(ا + حـ) − (ب + حـ) = ا + (− ب) + [حـ + (− حـ)] لأن الجمع عملية تبديلية وتجميعية في ص .

(ا + حـ) − (ب + حـ) = ا − ب + 0

أي (ا + حـ) − (ب + حـ) = ا − ب

وبما أن (ا − ب) ∈ ص⁺ إذن [(ا + حـ) − (ب + حـ)] ∈ ص⁺ .

وهذا يعني أن : ا + حـ ≤ ب + حـ

نظرية :

أ ، ب ، جـ ثلاثة أعداد صحيحة .
إذا كان أ $\leqslant$ ب فإن أ + جـ $\leqslant$ ب + جـ

1) أ ، ب عددان صحيحان حيث أ + 5 $\leqslant$ ب − 10
أثبت أن أ + 7 $\leqslant$ ب − 8 .
2) س ، ع عددان صحيحان حيث س + 8 $\leqslant$ ع − 7
أثبت أن س − 3 $\leqslant$ ع − 18 .

التَّمَارِينُ

1. أوجد صورة كل من الثنائيات المرتبة الآتية بواسطة الجمع في ص
(+3 ، +8) ، (−4 ، −12) ، (+8 ، −3) ، (−7 ، +5) ، (0 ، +120).
(+120 ، 0) ، (−13 ، 0) ، (−23 ، −18) ، (−38 ، +38) ، (−56 ، +40).

2. احسب ما يلي :
(−18)+(−12) ؛ (+14)+(+9) ؛ (−20)+0 ؛ (−25)+(+19) ؛
(+17)+(−11) ؛ 0+(+24) ؛ (−12)+(+12).

3. إذا كان أ = (−7) ، ب = (−9) ، حـ = (+5)
احسب (أ+ب) + حـ و أ + (ب + حـ).

4. باستخدام خاصة التجميع لعملية الجمع في ص احسب ما يلي :
1) (−12) + (−17) + (−23)
2) (+7) + (−3) + (+24).
3) (−5) + (+18) + (−18).

5. احسب بطريقتين كلا ممَّا يلي :
(+314) + (580) + (+100) ؛ (+250) + (−170) + (+137) ؛
(−116) + (−120) + (−62).

6. عيّن صورة كل من الثنائيات المرتبة بواسطة الطرح في ص :
(+5 ، +7) ، (−11 ، −15) ، (+12 ، +7) ، (−13 ، +1) ، (+14 . −8) ،
(0 ، −9) ؛ (−8 ، 0) ، (−25 ، −32) ، (+1 ، 0) ، (−3 ، −1) ،
(+1 ، 0).

7. احسب ما يلي :
(+15) − (+8) ؛ (−13) − (21) ؛ (−27) − (+17) ؛ (+8) − (+15) :
(−23) − (−19) ؛ (+48) − 0 ؛ 0 − (−150) ؛ (−60) − 0 ؛ 0 − (−120).

8. احسب ما يلي :

(−12) − (−7) و (−7) − (−12) ماذا تلاحظ ؟

(+16) − (+24) و (+24) − (+16) ماذا تلاحظ ؟

9. أكمل ما يلي :

(+25)+(...)=(−5) ؛ (−17)+(...)=(−12) ؛ (...)+(−3)=(−12)

(...)+(+8)=(+6) ؛ (+8)−(...)=(−2) ؛ (−7)−(...)=(+4)

(...)−(−9)=(−6) ؛ (...)−(+7)=(+1) ؛ (−11)−(...=(+11)

10. أوجد في كل من الحالات الآتية العدد الصحيح س بحيث :

(+27)+س=(+48) ؛ (−15)+س=(−18) ؛ س+(−72)=0 ؛

(−28)−س=(+34) ؛ س−(+39)=(+19) .

11. احسب بطريقتين كلاً مما يلي :

−[(+19)+(+150)] ؛ −[(+195)+(−135)] ؛ −[(−200)+(−397)] ؛

−[(−179)−(+246)] ؛ −[(−553)−(+1401)] ؛ −[(+47)−(−19)] .

12. إذا كان أ = (+12) ، ب = (−24) ؛ حـ = (+13) .

ـ احسب :

1) (أ + ب) + حـ ؛ أ + (ب + حـ) .

2) (أ + ب) − حـ ؛ أ + (ب − حـ) .

3) أ − (ب + حـ) ؛ (أ − ب) − حـ .

4) أ − (ب − حـ) ؛ (أ − ب) + حـ .

ـ ماذا تلاحظ في كل حالة ؟

13. احسب كلا مما يلي :

(+27) + [(−15) + (−19)] ؛ (−65) + (+43) − (+11) ؛

(+10) − (−28) + (+13) ؛ (−79) − (−46) − (+55) .

14. أ ، ب عددان صحيحان حيث : أ + (− 18) = ب + (+ 13)

بيّن أن :

1) أ + (− 15) = ب + (+ 16) .

2) أ + (− 13) = ب + (+ 18) .

3) أ + (+ 10) = ب + (+ 41) .

15. س ، ع عددان صحيحان حيث :

س − (+ 79) = ع − (+ 52) .

بيّن أن :

1) س = ع + (+ 27) .

2) س + (− 27) = ع .

3) س + (− 49) = ع + (− 22) .

16. س ، ع عددان صحيحان بحيث : س + (+ 1) = ع + (+ 6) .

1) قارن بين س + (+ 7) و ع + (+ 12) .

2) قارن بين س + (− 7) و ع + (− 12) .

17. س ، ع عددان صحيحان بحيث : س + (+ 8) = ع

1) بيّن أن س + (+ 6) = ع + (− 2) .

2) بيّن أن س + (− 1) = ع + (− 9) .

18. قارن في كل حالة بين | س | و | ع | ثم بين س و ع .

1) س = (−15) و ع = (−35) ، 2) س = (−318) وع = (−118) .

3) س = − (+ 23) و ع = − (− 17) ؛ 4) س = (+ 9) و ع = (+ 8) .

5) س = (− 9) و ع = (− 9) ؛ 6) س = (− 11) و ع = 0 .

19. 1) س ، ع ، ص أعداد صحيحة حيث : س + ع + (+ 8) ⩽ ص + (+ 8)

قارن بين س + ع و ص .

2) إذا كان س + (+ 12) ⩽ ع + (+ 15) .

ـ بيّن أن س ⩽ ع + (+ 3) .

3) إذا كان س − (+ 9) ⩽ ع − (+ 4) .

ـ بيّن أن س + (+ 1) ⩽ ع + (+ 6) .

20. س ، ع ، ص ثلاثة أعداد صحيحة :

1) نفرض ان س + ع − (+ 7) ⩾ ص − (+ 7) . قارن بين س + ع و ص .
2) نفرض أن س + (− 12) ⩾ ع + (− 15) . بيّن أن س ⩾ ع + (− 3) .
3) نفرض أن س + (+ 7) ⩾ ع + (+ 9) . بيّن أن س + (− 3) ⩾ ع + (− 1) .

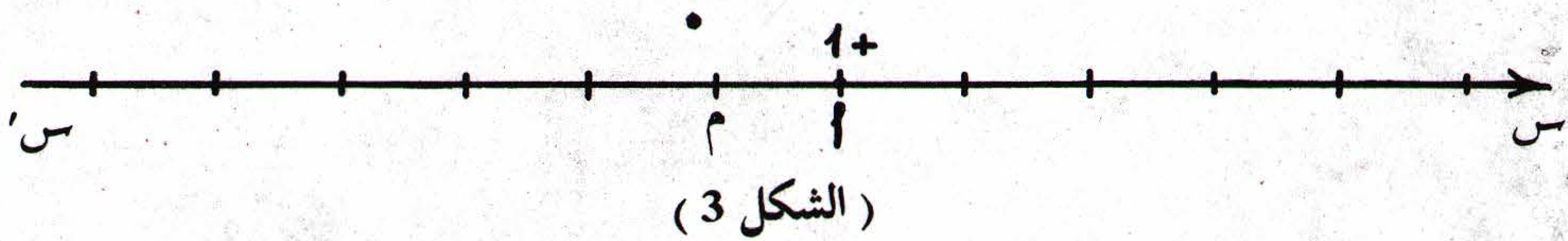
21. س ، ع عددان صحيحان بحيث س + (+ 8) ⩾ ع + (− 7)
أثبت أن :

1) س + (− 3) ⩾ ع + (− 18) .
2) س + (+ 11) ⩾ ع + (− 4) .
3) س ⩾ ع + (− 15) .

22. ا ، ب ، حـ أعداد صحيحة بحيث :
ا + ب < حـ + (− 7) و حـ < (+ 8)
بيّن أن ا + ب < (+ 1)

23. س ، ع عددان صحيحان بحيث :
س + (− 3) ⩾ ع + (− 12) و ع + (− 5) ⩾ (+ 9) .
بيّن أن : س ⩾ (+ 5) .

24. (س سَ) محور مبدأه م ، الطول م ا هو وحدة التدريج لهذا المحور حيث النقطة ا تمثل العدد الصحيح (+ 1) .



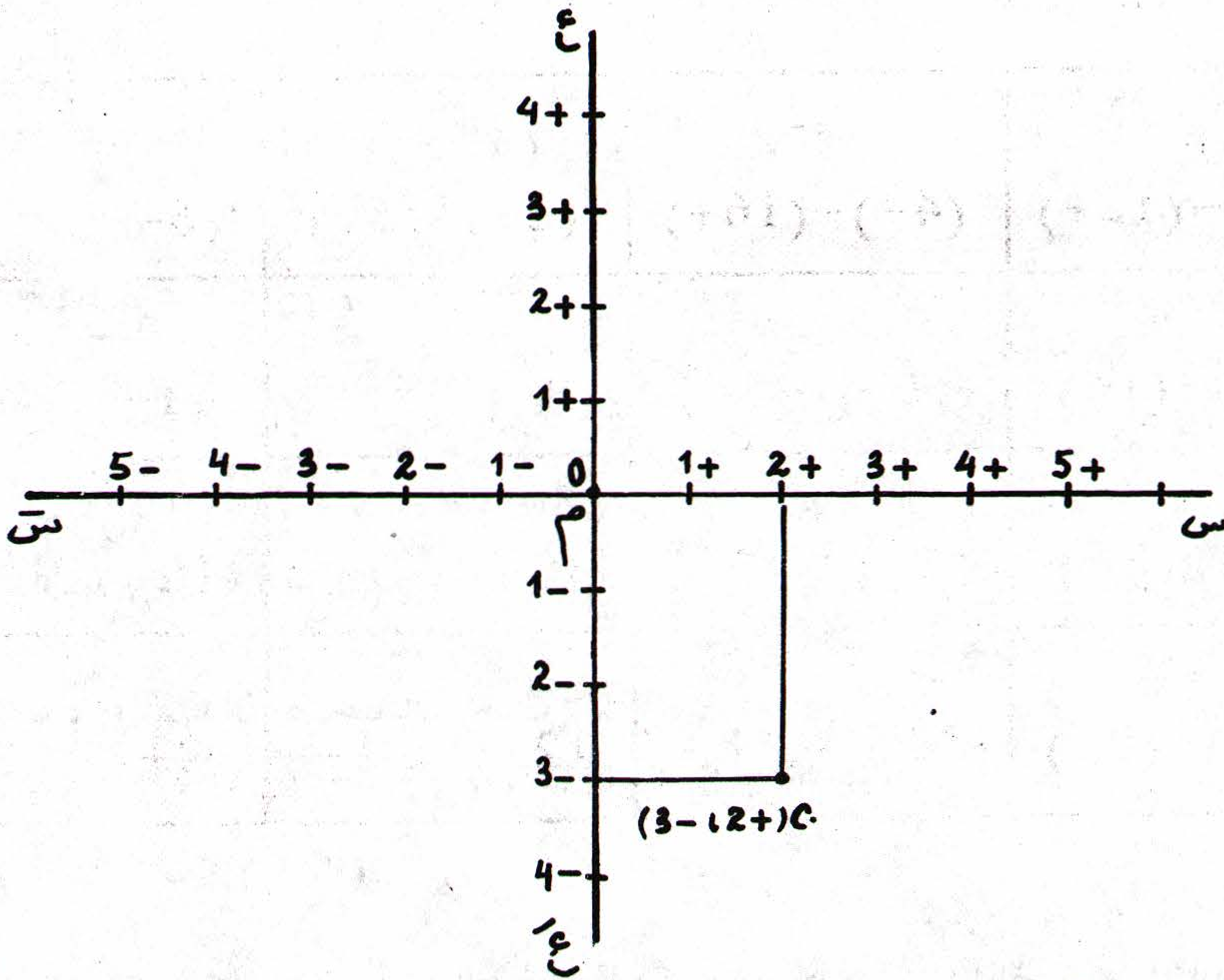
(الشكل 3)

1) عيّن على المحور (س سَ) النقط ب ، حـ ، ء التي فواصلها على الترتيب (− 2) ، (+ 6) ، (− 5) .
2) عيّن فاصلة النقطة هـ نظيرة النقطة ء بالنسبة إلى م .
3) ما هي فاصلة النقطة ل منتصف القطعة [ب حـ] .

25. (س سَ) ، (ع عَ) محوران متعامدان مدرّجان بالأعداد الصحيحة (الشكل 4)

كل ثنائية مرتبة (ا ، ب) من ص × ص تمثّل بنقطة من المستوي .

مثال : الثنائية (+2 ، −3) تمثل بنقطة ج ونكتب : ج (+2 ، −3) .



(الشكل 4)

1) عيّن النقط ح ، ء ، ه التي تمثل الثنائيات (−2 ، +3) ، (+2 ، +3) ، (−2 . −3) على الترتيب .

2) ما هي نظيرة ج بالنسبة إلى م ؟

3) ما هي نظيرة ء بالنسبة إلى م ؟

4) ما نوع الرباعي ح ء ج ه ؟

متاهة

يمثل الجدول الآتي متاهة :

المدخل ↓

أ (6−)−(16−)	ب (2−)−(5+)	جـ (4−)−(16+)	د (7−)−(12+)
هـ (1+)−(7−)	(9−)−(15−)	(1−)−(5−)	(1+)−(1−)
ك (10−)−(23−)	(10−)−(23−)	(5−)−(25+)	(8+)−(8+)
ل (2+)−(62+)	(12−)−(48−)	(22+)+(18−)	(10−)−(8−)

المخرج ↓

في هذه المتاهة مسلك وحيد يربط بين المدخل والمخرج ، يتم عبور هذا المسلك بطريقة معينة حيث يكون الإنتقال من خانة إلى خانة مجاورة إما أفقيا وإما عموديا .

- اجر العملية في كل خانة ثم استخرج القانون الذي يسمح بتعيين هذا المسلك .

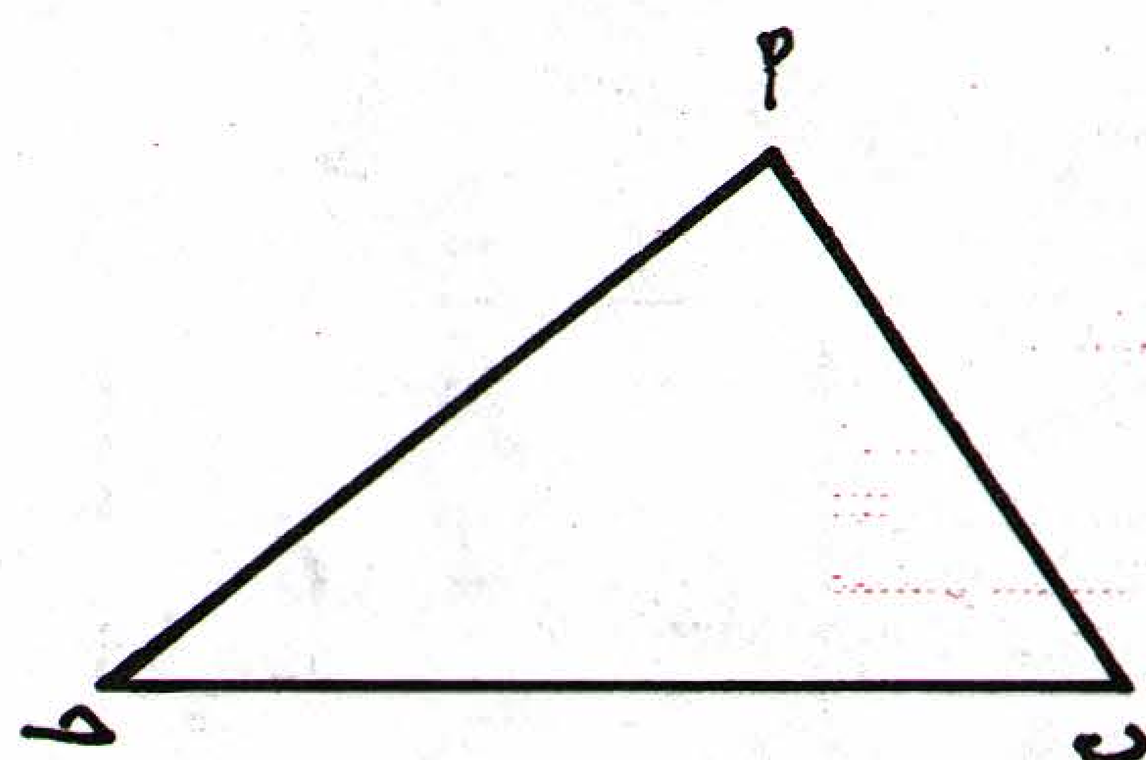
4 المثلثات

مراجعة وتتمات

1 ـ المثلث :

تعريف :

المثلث هو مضلع ذو ثلاثة أضلاع .



(الشكل 1)

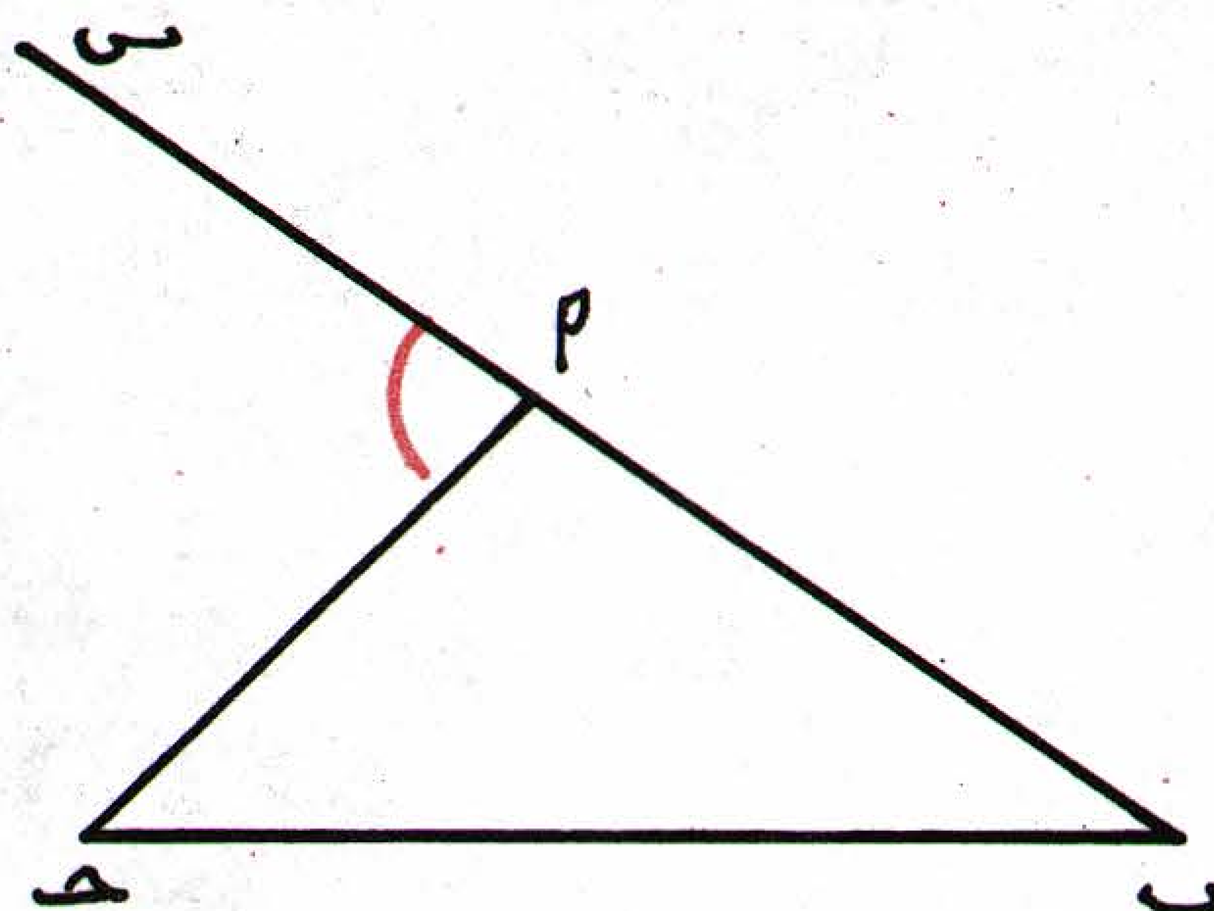
في الشكل (1) ا ب حـ مثلث.

- ا ، ب ، حـ هي **الرؤوس** .
- [ا ب] ، [ا حـ] ، [ب حـ] هي **الأضلاع** .
- كل من [ا ب ، ا حـ] ، [ب ا ، ب حـ] ، [حا ، حـ ب] هي **زاوية داخلية** في المثلث ا ب حـ.
- الرأس ب **يقابل** الضلع [ا حـ] .

نقول أيضا إن الضلع [ا حـ] يقابل الزاوية [ب ا ، ب حـ] .

ـ اذكر الرؤوس والأضلاع الأخرى المتقابلة .

- في الشكل (2) [ا س نصف مستقيم حامله (ا ب) .



(الشكل 2)

الزاوية [اس ، اح] مجاورة ومكملة للزاوية الداخلية [اب ، اح] فتسمى **زاوية خارجية** بالنسبة إلى المثلث ابح.

تعريف :

> **الزاوية الخارجية بالنسبة إلى مثلث هي زاوية مجاورة ومكملة لإحدى زواياه الداخلية.**

ـ عيّن الزوايا الخارجية الأخرى بالنسبة إلى المثلث ابح.

1) أنشيء باستعمال المسطرة والمنقلة مثلثا ابح حيث .
ب ح = 6 سم . $\widehat{\text{ابح}} = 50^\circ$. $\widehat{\text{احب}} = 70^\circ$.

2) أنشيء باستعمال المسطرة والمنقلة مثلثا ابح حيث :
اب = 3.5 سم . $\widehat{\text{باح}} = 75^\circ$. اح = 4 سم .

3) أنشيء باستعمال المسطرة والمدور مثلثا ابح حيث :
اب = 4 سم . اح = 5 سم . ب ح = 6 سم .

2 ـ المثلثات الخاصة :

المثلث	تعاريف
المثلث القائم (ا، ب، ح)	• المثلث القائم هو مثلث إحدى زواياه قائمة . • الضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى **الوتر** • يمكن أن نقول عن ضلعي الزاوية القائمة إنهما الضلعان القائمان .

المثلث المتقايس الضلعين	• المثلث المتقايس الضلعين هو مثلث له ضلعان متقايسان . • النقطة المشتركة للضلعين المتقايسين تسمى **الرأس الأساسي** . • الضلع المقابل للرأس الأساسي يسمى **القاعدة** .
المثلث المتقايس الأضلاع	• المثلث المتقايس الأضلاع هو مثلث أضلاعه متقايسة .

ـ أنشىء باستعمال المدور والمسطرة مثلثا أ ب ح ، ثم بيّن نوعه علما أن :

1) ب ح = 5 سم ، أ ب = 3 سم ، أ ح = 4 سم .

2) ب ح = 5 سم ، أ ب = 4 سم ، أ ح = 4 سم .

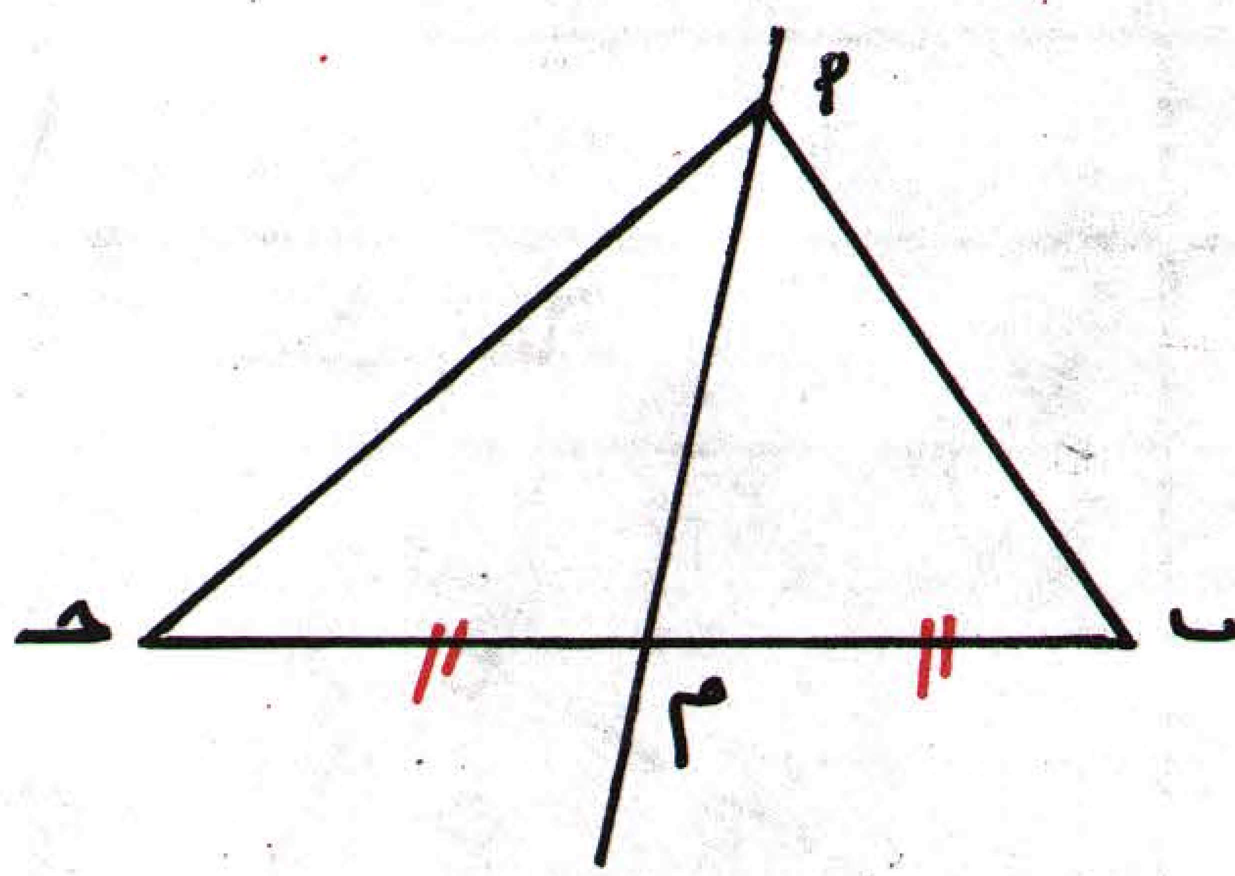
3) ب ح = 3,5 سم ، أ ب = 3,5 سم ، أ ح = 3,5 سم .

3 ـ المستقيمات الخاصة في المثلث :

1) المتوسط :

تعريف :

المتوسط في مثلث هو مستقيم يشمل أحد رؤوس هذا المثلث ومنتصف الضلع المقابل لهذا الرأس .



(الشكل 3)

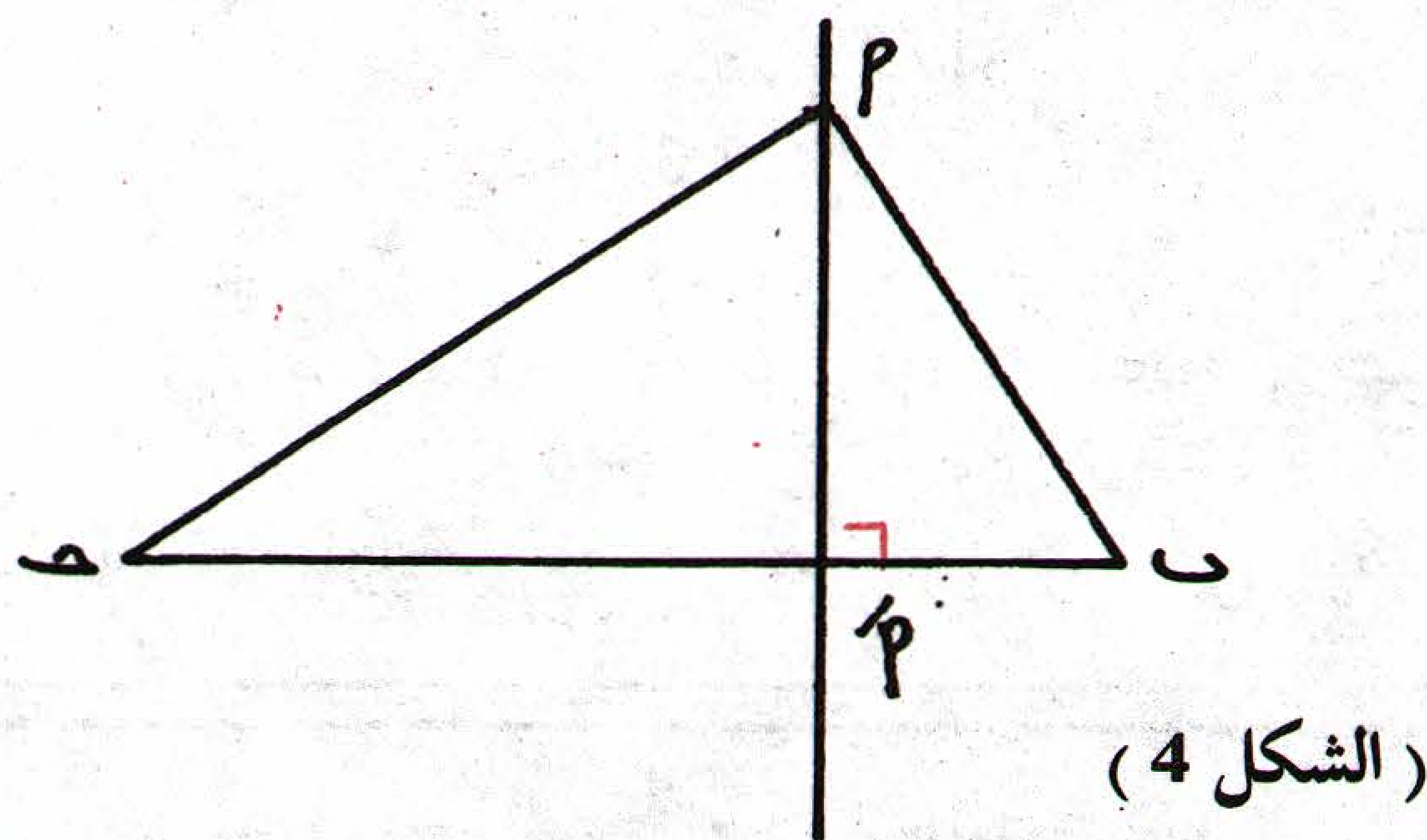
- في الشكل (3) (ا م) متوسط متعلق بالضلع [ب ح] .
- كلمة متوسط تدل أيضا على القطعة [ا م] أو على الطول ا م .
- للمثلث ثلاثة متوسطات تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز ثقل هذا المثلث .

ا ب ح مثلث ، أنشىء متوسطاته الثلاثة

2) **العمود :**

تعريف :

العمود في مثلث هو مستقيم يشمل أحد رؤوس هذا المثلث ويكون عموديا على حامل الضلع المقابل لهذا الرأس .



(الشكل 4)

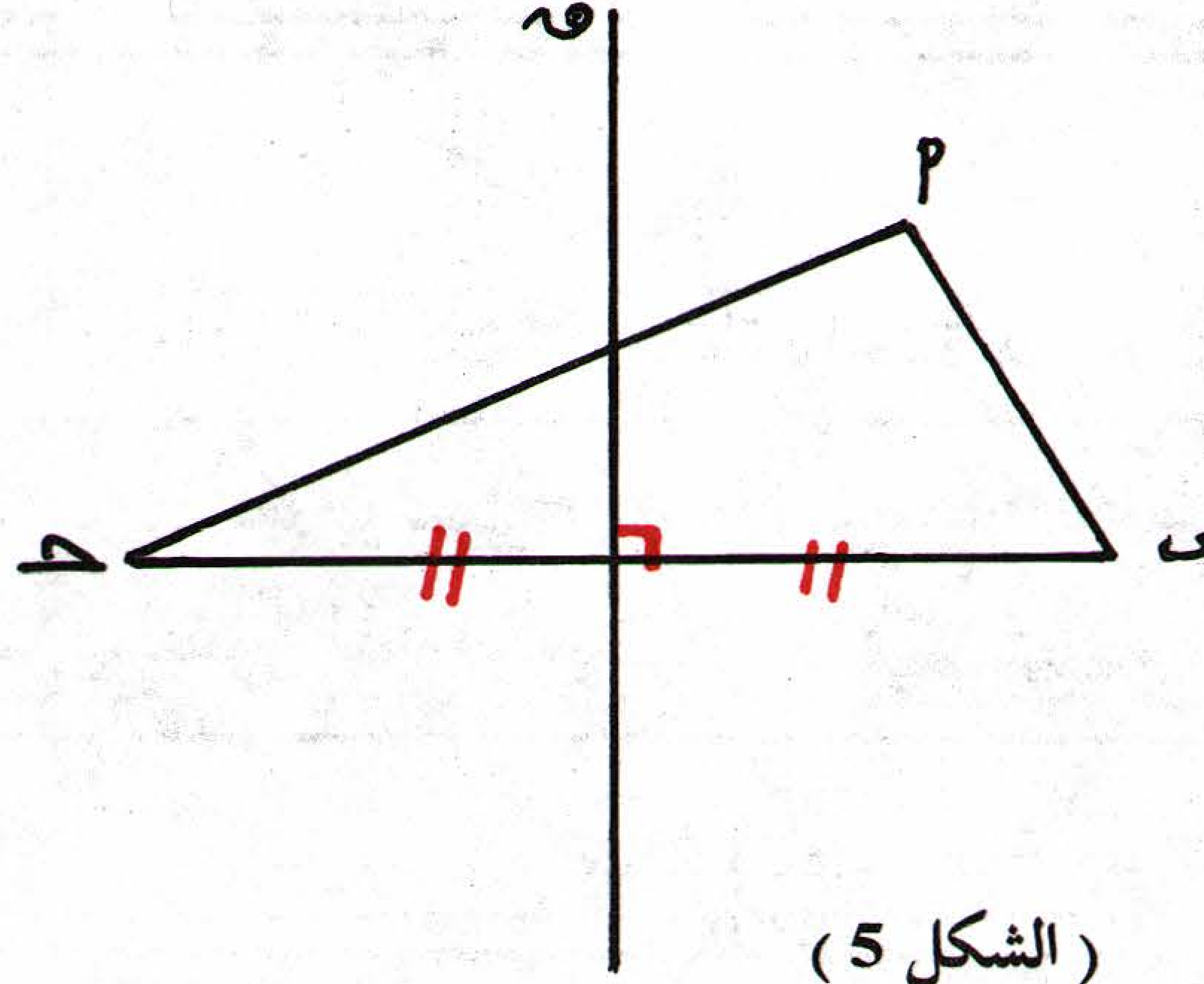
- في الشكل (4) (ا ا') عمود للمثلث ا ب ح .
- الطول ا ا' هو الإرتفاع المتعلق بالضلع [ب ح] .
- لاحظ أيضا أن الطول ا ا' هو المسافة بين الرأس ا وحامل الضلع [ب ح] .
- للمثلث ثلاثة أعمدة تتقاطع في نقطة واحدة .

1) ا ب ح مثلث ، أنشىء أعمدته الثلاثة .
2) ا ب ح مثلث قائم ؛ أنشىء أعمدته الثلاثة . ماذا تلاحظ ؟

3) المحور :

تعريف :

المحور في مثلث هو محور أحد أضلاعه .



(الشكل 5)

• في الشكل (5) ، (ﻫ) هو محور [ب حـ] فهو محور للمثلث أ ب حـ .

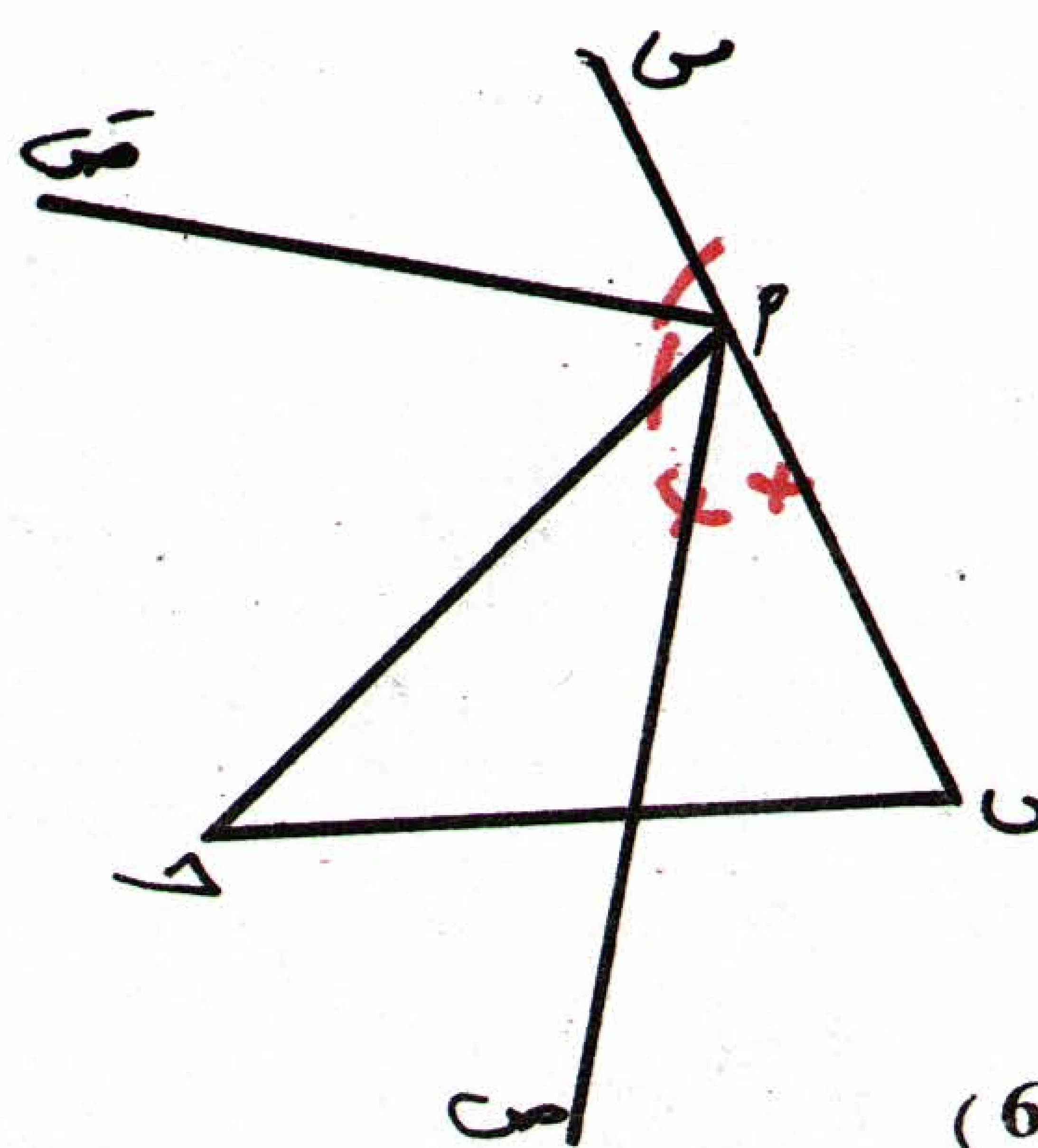
• للمثلث ثلاثة محاور تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث .

1) أ ب حـ مثلث ، أنشىء محاوره الثلاثة . ارسم الدائرة المحيطة بهذا المثلث . 2) متى يكون محور مثلث محور تناظر له ؟

4) المنصف :

تعريف :

المنصف الداخلي في مثلث هو منصف إحدى زواياه الداخلية .
المنصف الخارجي في مثلث هو منصف إحدى زواياه الخارجية .



(الشكل 6)

• للمثلث ثلاثة منصفات داخلية تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز لدائرة مرسومة داخل هذا المثلث .

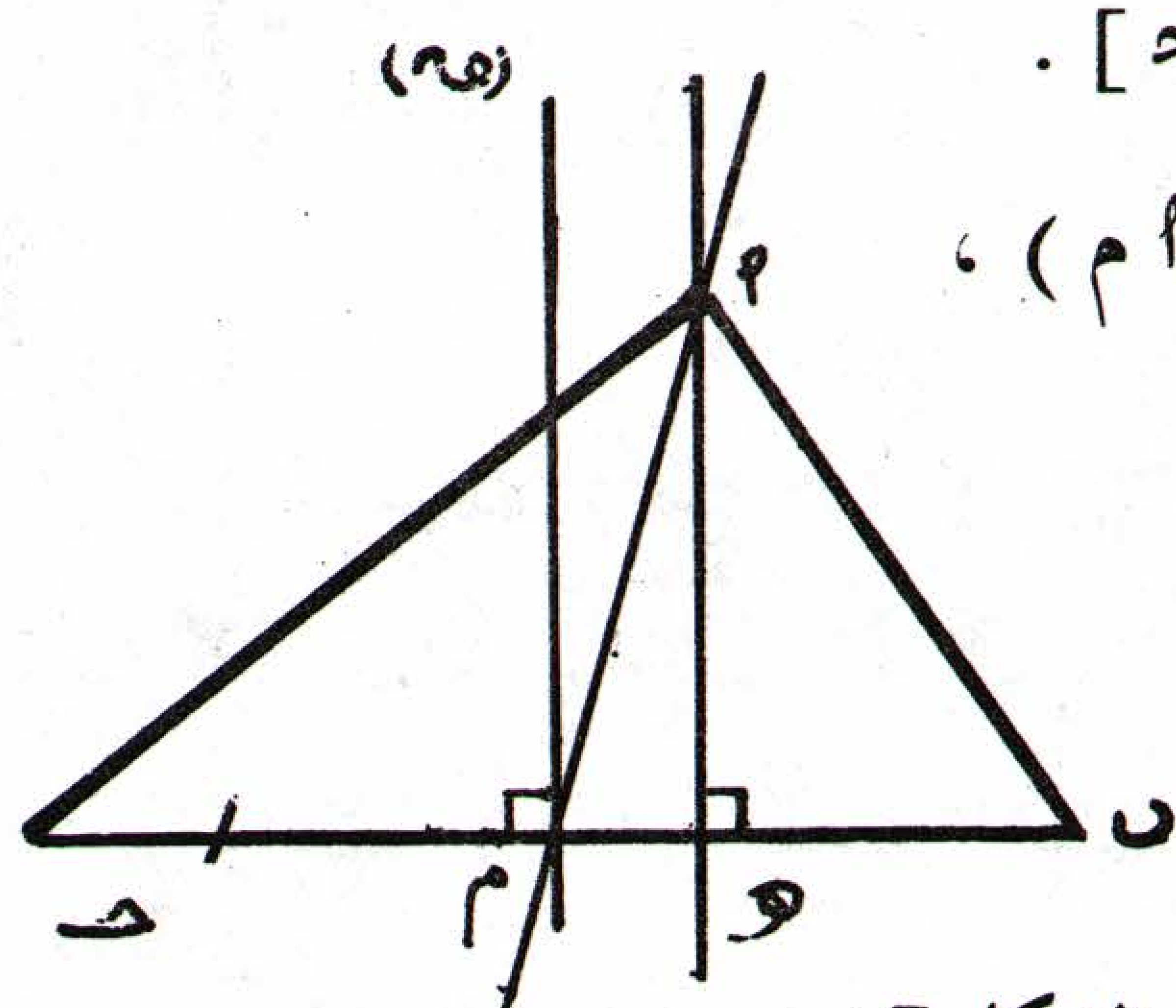
• في الشكل (6) ، [ا ص منصف داخلي ، [ا صَ منصف خارجي .

• برهن على أن حاملي المنصفين الداخلي والخارجي المتعلقين بنفس الرأس متعامدان .

1) إليك الشكل (7) حيث م منتصف [ب ح] .

ـ من بين المستقيمات الثلاثة (ق) ، (ا هـ) ، (ا م) ،

عيّن المتوسط والعمود والمحور . علّل إجابتك .



(الشكل 7)

2) ا ب ح مثلث .

ـ أنشئ منصفاته الداخلية والخارجية .

3) ا ب ح مثلث متساوي الساقين قاعدته [ب ح] .

ـ أنشئ منصف زاوية الرأس ا ، ثم أنشئ كلًا من المتوسط والعمود المتعلقين بالقاعدة [ب ح] . ما هو محور [ب ح] ؟

4 ـ مجموع أقياس زوايا مثلث :

سبق لك أن لاحظت أن :

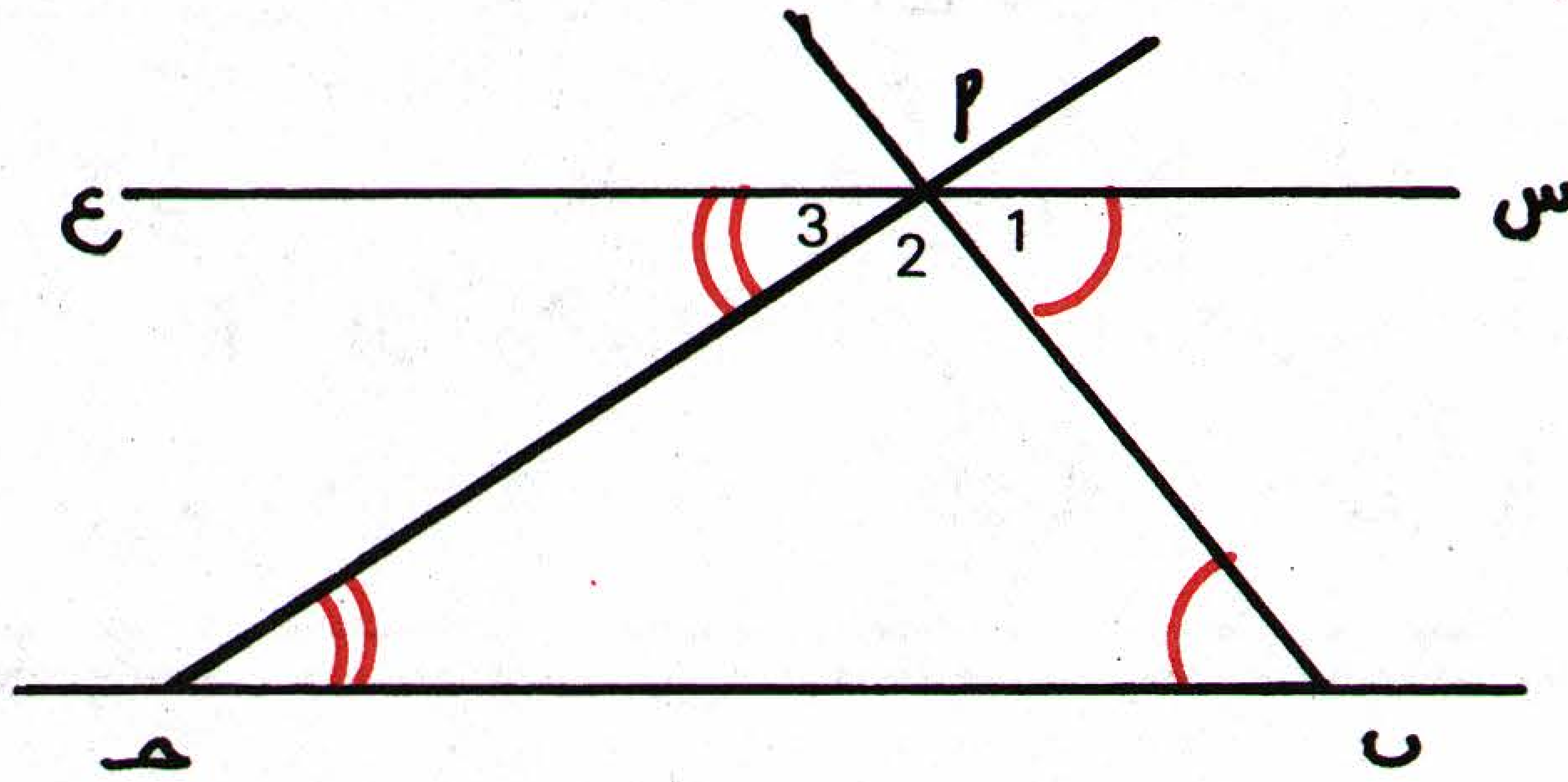
« مجموع أقياس الزوايا الداخلية لمثلث هو $180°$. » .

يمكننا الآن أن نبرهن على هذه النتيجة .

البرهان :

أ ب حـ مثلث .

ـ نرسم المستقيم (س ع) الذي يشمل أ ويوازي (ب حـ) .(الشكل 8) .



(الشكل 8)

ـ المستقيمان (ب حـ) و (س ع) متوازيان و (أ ب) قاطع لهما ، فالزاويتان المتبادلتان داخليا [أ س ، أ ب] و [ب أ ، ب حـ] متقايستان أي $\widehat{أ}_1 = \widehat{ب}$.

ـ وأيضا (أ حـ) قاطع للمستقيمين المتوازيين (س ع) و (ب حـ) فالزاويتان [أ ع ، أ حـ] و [حـ أ ، حـ ب] متقايستان أي $\widehat{أ}_3 = \widehat{حـ}$.

وبما أن

$$\begin{cases} \widehat{أ}_1 + \widehat{أ}_2 + \widehat{أ}_3 = 180° \\ \text{و} \\ \widehat{أ}_1 = \widehat{ب} \text{ و } \widehat{أ}_3 = \widehat{حـ} \end{cases}$$

فإن $\widehat{ب} + \widehat{أ}_2 + \widehat{حـ} = 180°$.

نظرية :

مجموع أقياس الزوايا الداخلية لمثلث يساوي 180^0 .

ـ برهن أن قيس أي زاوية خارجية بالنسبة إلى مثلث يساوي مجموع قيسي الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها ، استنتج أن قيس الزاوية الخارجية بالنسبة إلى مثلث هو أكبر من قيس كل من الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها .

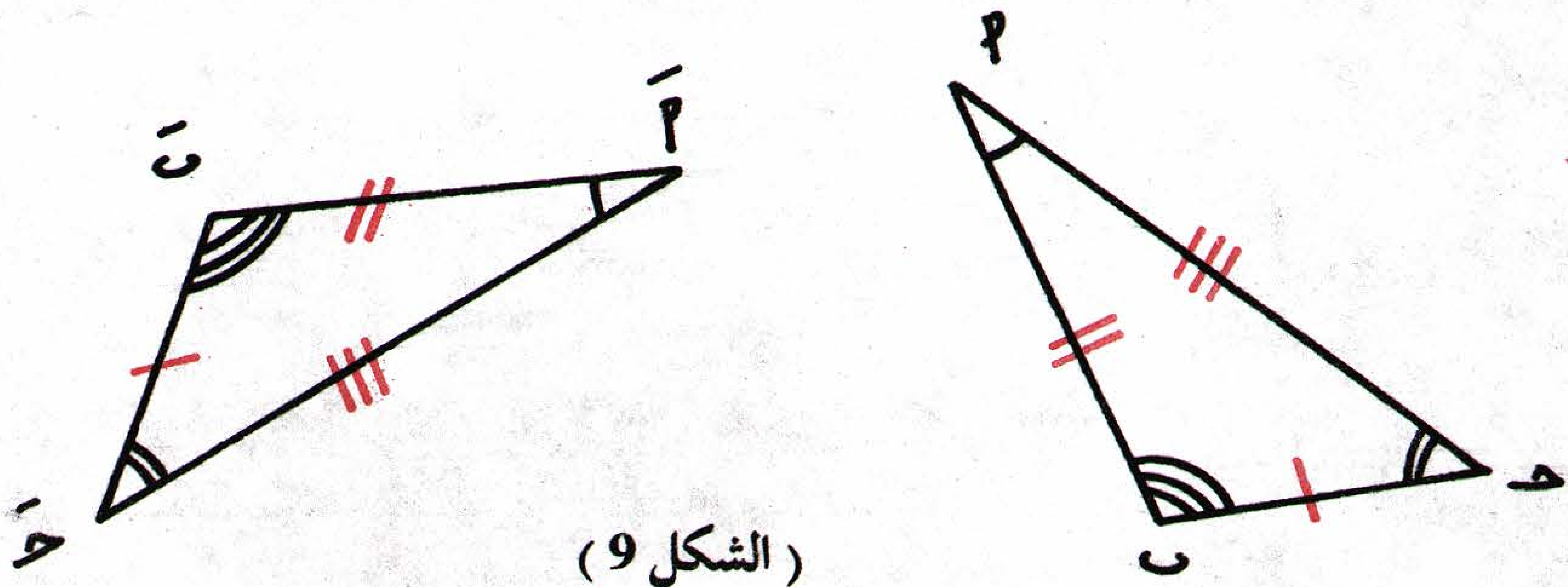
المثلثات المتقايسة

1 ـ تعريف ونتائج :

تعريف :

المثلثان المتقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق .

• ا ب حـ مثلث ، ننشىء باستعمال الورق الشفاف مثلثا ا′ب′حـ′ يقايسه (الشكل 9).



(الشكل 9)

نستنتج من هذا التقايس المساويات الست الآتية :

• أب = أ′ب′ ، • أحـ = أ′حـ′ ، • ب حـ = ب′حـ′

و

• أ̂ = أ̂′ ، • ب̂ = ب̂′ ، • حـ̂ = حـ̂′

• في مثلثات متقايسة ، الأضلاع المتقايسة والزوايا المتقايسة تسمى عناصر متماثلة .

في الشكل (9) :

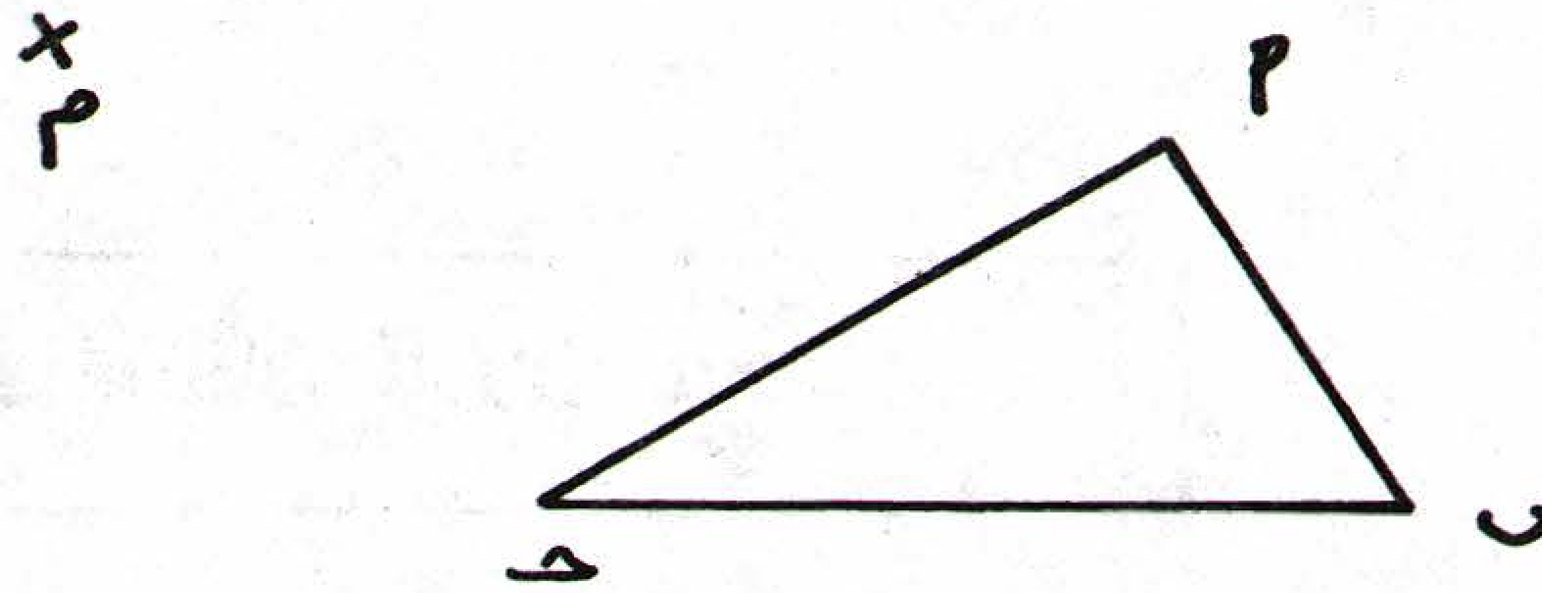
الضلعان [أب] ، [أ′ب′] متماثلان ،

وكذلك الزاويتان [أب ، أحـ] ، [أ′ب′ ، أ′حـ′] متماثلتان .

ـ اذكر العناصر المتماثلة الأخرى لهذين المثلثين .

2 ـ المثلثان المتناظران بالنسبة إلى نقطة :

نشاط : أ ب حـ مثلث ، م نقطة . (الشكل 10) .



(الشكل 10)

ـ أنشىء النقط أ′ ، ب′ ، حـ′ نظائر النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب بالنسبة إلى م .

المثلث أ′ب′حـ′ يسمى **نظير المثلث** أ ب حـ بالنسبة إلى م .

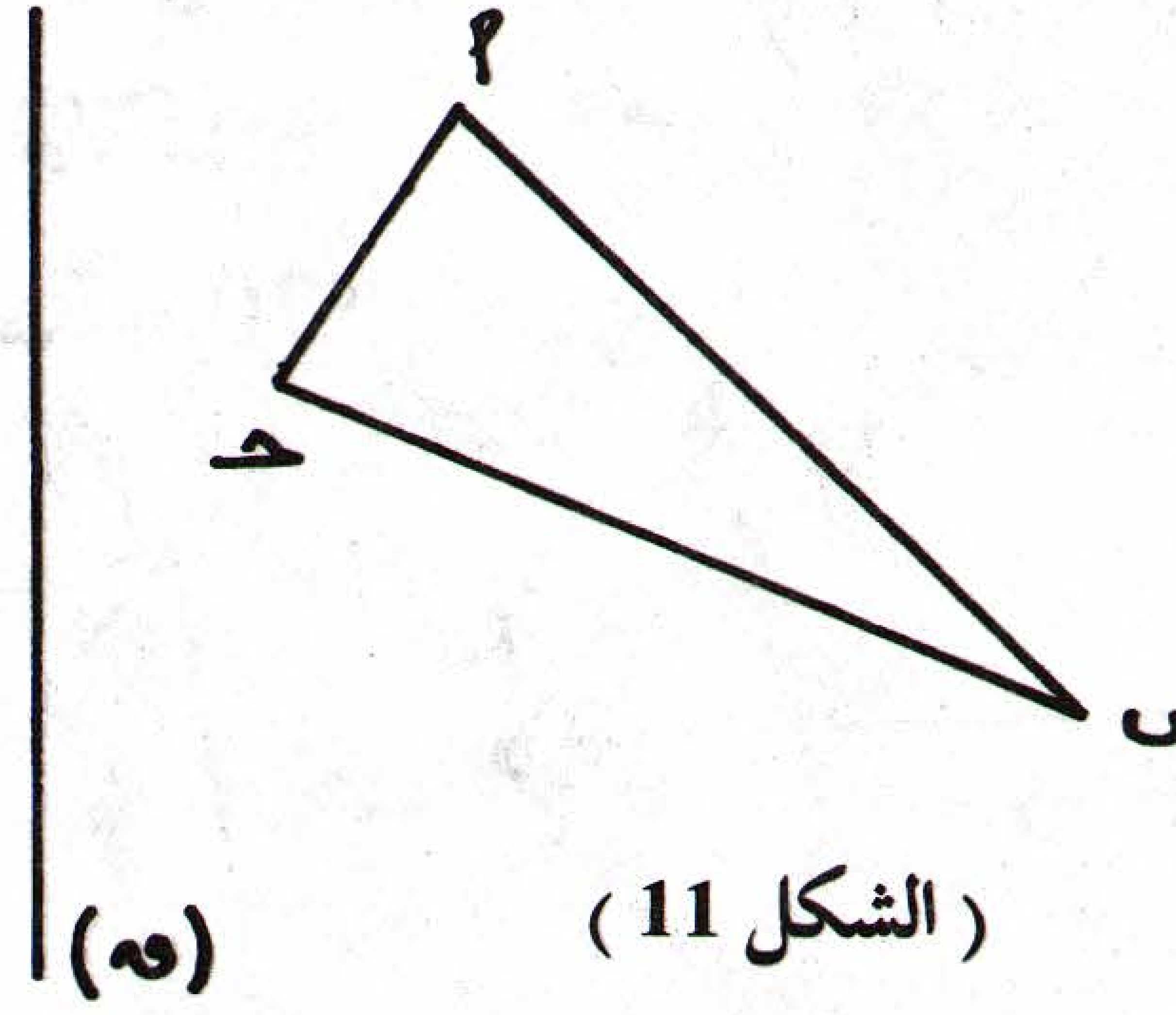
ـ تحقق أن المثلثين أ ب حـ ، أ′ب′حـ′ متقايسان .

نتيجة :

المثلثان المتناظران بالنسبة إلى نقطة متقايسان .

3ـ المثلثان المتناظران بالنسبة إلى مستقيم :

نشاط : أ ب حـ مثلث ، (ق) مستقيم (الشكل 11)



(الشكل 11)

ـ أنشىء النقط أ′ ، ب′ ، حـ′ نظائر النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب بالنسبة إلى (ق) .

المثلث أ′ب′حـ′ يسمى **نظير المثلث** أ ب حـ بالنسبة إلى (ق) .

ـ تحقق أن المثلثين أ ب حـ ، أ′ب′حـ′ متقايسان .

نتيجة :

> **المثلثان المتناظران بالنسبة إلى مستقيم متقايسان**

ملاحظة :

إذا كان أ ب حـ ، أ′ب′حـ′ مثلثين متناظرين بالنسبة إلى نقطة أو إلى مستقيم فإن عناصرهما المتناظرة هي عناصر متماثلة .

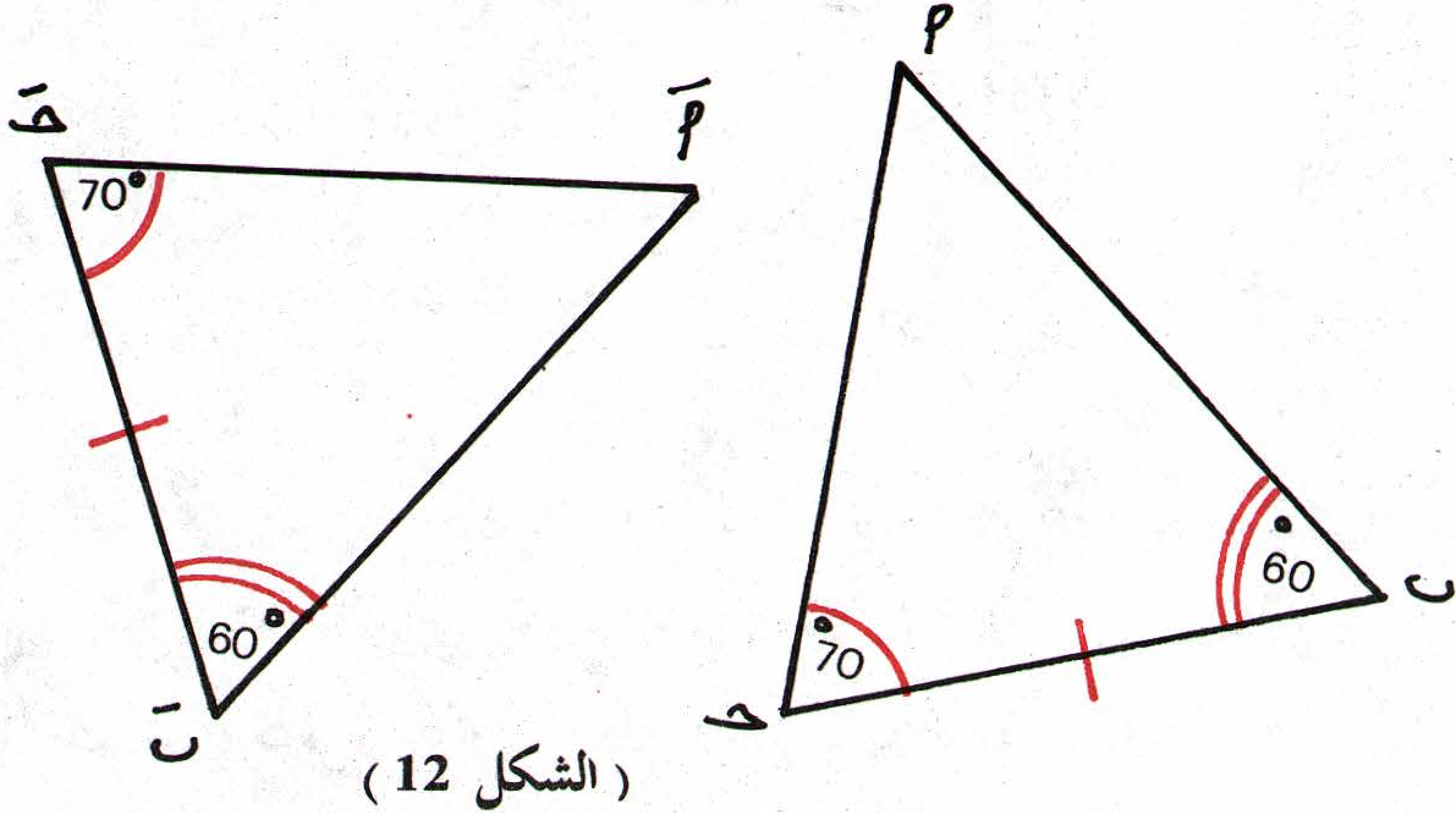
4. حالات أخرى لتقايس مثلثين :

الأنشطة الآتية تبيّن أنه لكي يتقايس مثلثان ليس من الضروري تحقُّق المساويات الست الواردة في الفقرة 1 ، بل يكفي أن تتحقق ثلاث منها مختارة بكيفية معينة ؛ توجد ثلاث حالات ممكنة .

نشاط 1 :

ـ أنشئ مثلثين أ ب ح ، أ' ب' ح' حيث :

- ب ح = ب' ح'
- $\widehat{\text{أ ب ح}} = \widehat{\text{أ' ب' ح'}} = 60°$
- $\widehat{\text{أ ح ب}} = \widehat{\text{أ' ح' ب'}} = 70°$



(الشكل 12)

ـ تحقق بالورق الشفاف أن هذين المثلثين متقايسان .

- أذكر العناصر المتماثلة لهذين المثلثين .

نتيجة 1 :

لكي يتقايس مثلثان يكفي أن تتقايس زاويتان والضلع المحدد برأسيهما من المثلث الأول مع زاويتين والضلع المحدد برأسيهما من المثلث الثاني .

أ ب ح ، د هـ و مثلثان قائمان في أ ، دّ بحيث :

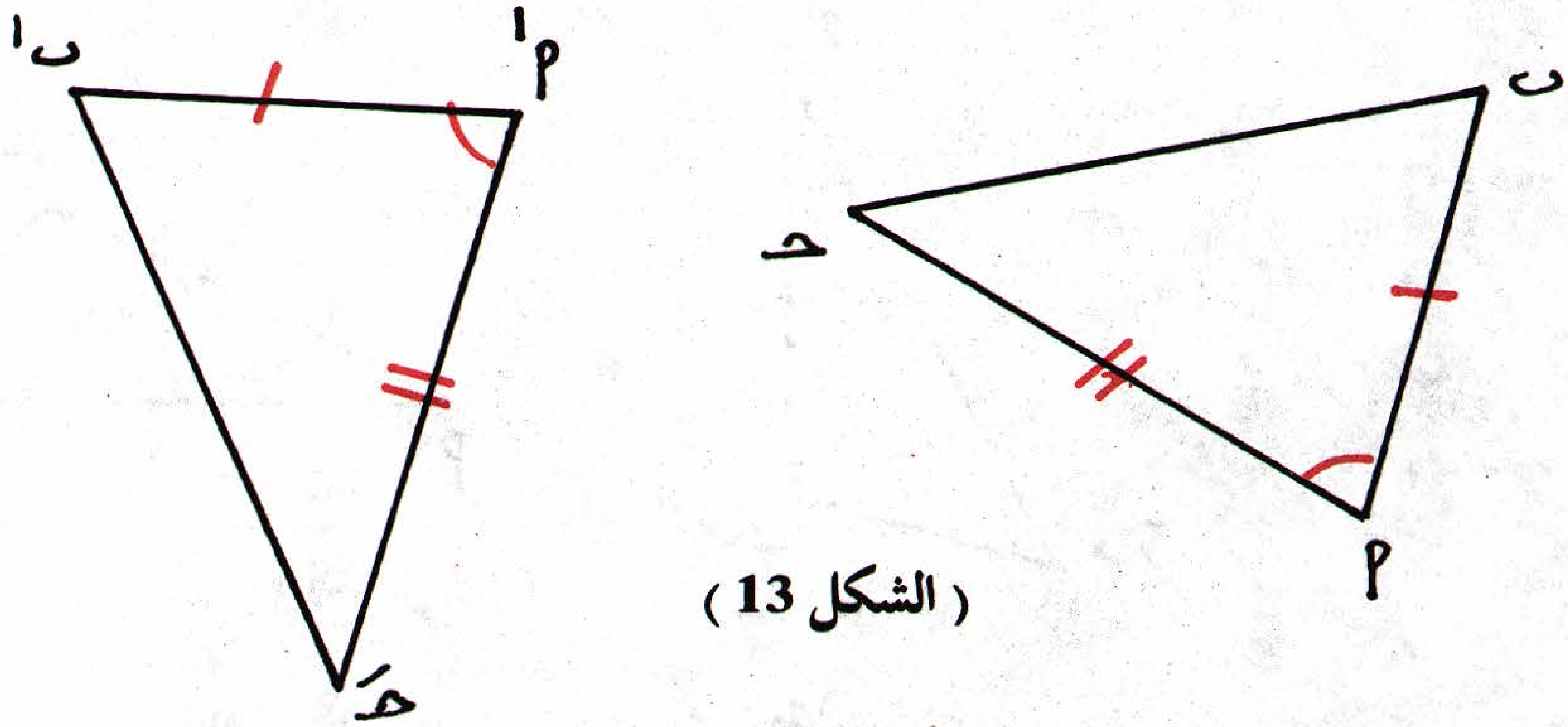
أ ب = د هـ ، $\widehat{\text{أ ب ح}} = \widehat{\text{د هـ و}}$.

ـ بيّن أن المثلثين أ ب ح ، د هـ و متقايسان .

نشاط 2 :

أنشيء مثلثين ا ب حـ ، ا′ ب′ حـ′ حيث :

- ا ب = ا′ ب′ = 3 سم
- ا حـ = ا′ حـ′ = 4 سم
- ب̂ا حـ = ب̂′ا′ حـ′ = 75°



(الشكل 13)

ـ تحقق بالورق الشفاف أن هذين المثلثين متقايسان .

ـ اذكر العناصر المتماثلة في هذين المثلثين .

نتيجة 2 :

لكي يتقايس مثلثان يكفي أن يتقايس ضلعان والزاوية المحددة بهما من المثلث الأول مع ضلعين والزاوية المحددة بهما من المثلث الثاني .

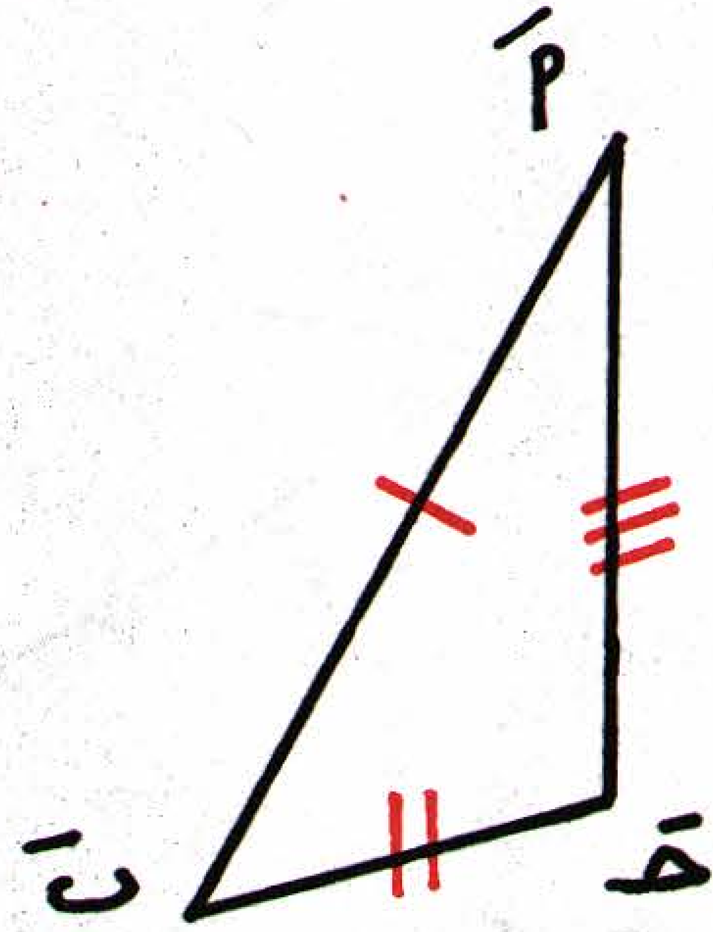
ا ب حـ مثلث متساوي الساقين ، المنصف [ا ص يقطع [ب حـ] في النقطة هـ .

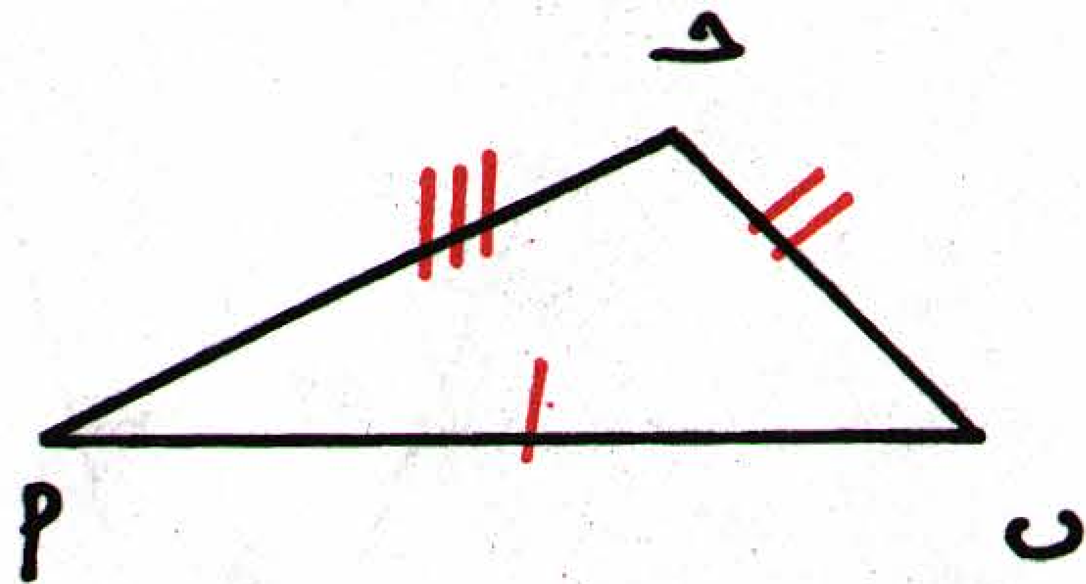
ـ بيّن أن المثلثين ا ب هـ ، ا حـ هـ متقايسان . اذكر عناصرهما المتماثلة .

نشاط 3 :

أنشيء مثلثين ا ب حـ ، ا' ب' حـ' حيث :

- ا ب = ا' ب' = 4 سم
- ا حـ = ا' حـ' = 3 سم
- ب حـ = ب' حـ' = 2 سم





(الشكل 14)

ـ تحقق بالورق الشفاف أن هذين المثلثين متقايسان .

- اذكر العناصر المتماثلة في هذين المثلثين .

نتيجة 3 :

لكي يتقايس مثلثان يكفي أن يقايس كل ضلع من أحدهما ضلعًا من الآخر .

نستخلص مما سبق ما يلي :

لإثبات تقايس مثلثين نستخدم إحدى الحالات الآتية :

- **إما التناظر المركزي .**
- **أو التناظر المحوري**
- **أو إحدى النتائج الثلاث السابقة .**

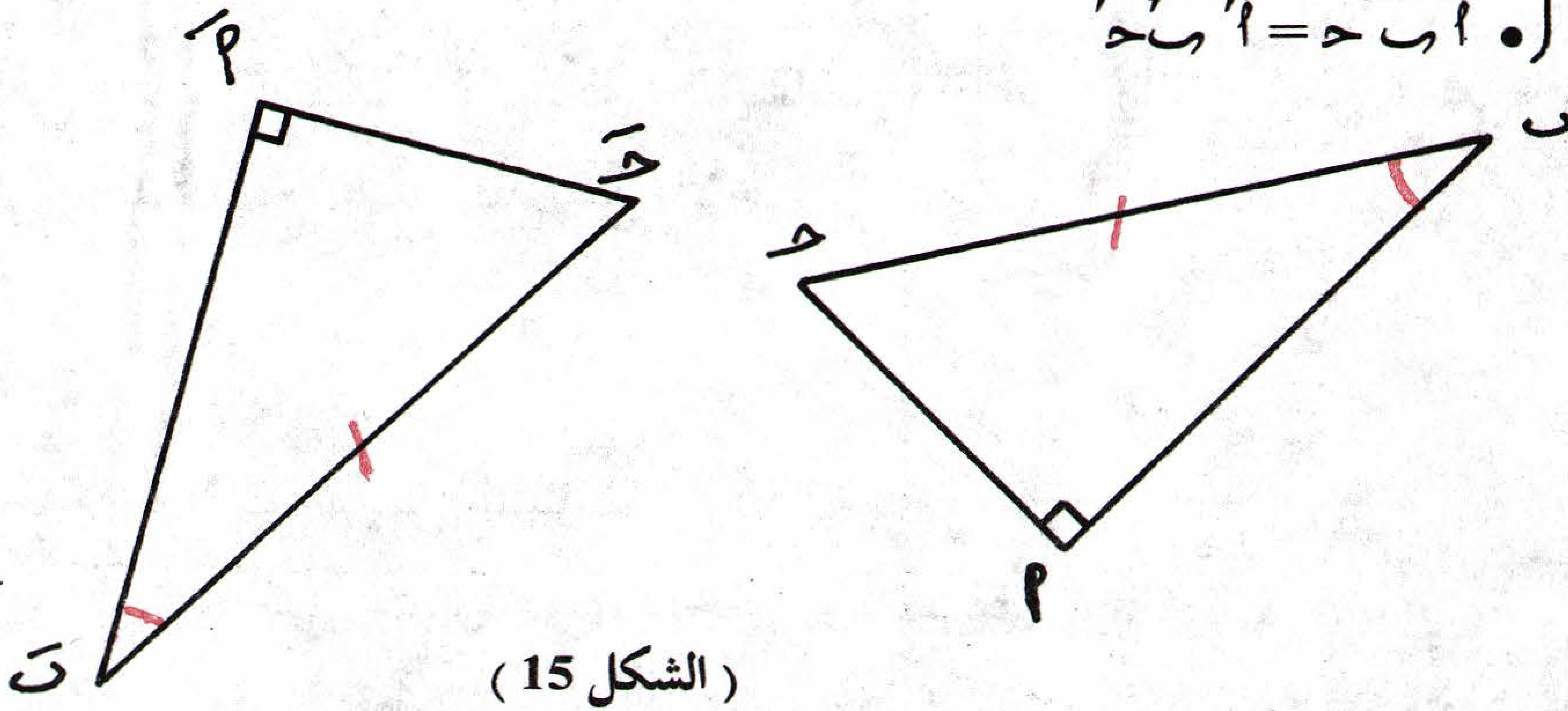
5. حالات خاصة لتقايس مثلثين قائمين :

النشاطان الآتيان يعالجان الشروط الكافية لتقايس مثلثين قائمين .

نشاط 1 :

في الشكل (15) ا ب ح ، ا' ب' ح' مثلثان قائمان في ا و ا' على الترتيب حيث :

• ب ح = ب' ح'
• $\widehat{\text{ا ب ح}} = \widehat{\text{ا' ب' ح'}}$



(الشكل 15)

ـ تحقق باستعمال الورق الشفاف أن هذين المثلثين متقايسان .

ـ اذكر عناصرهما المتماثلة .

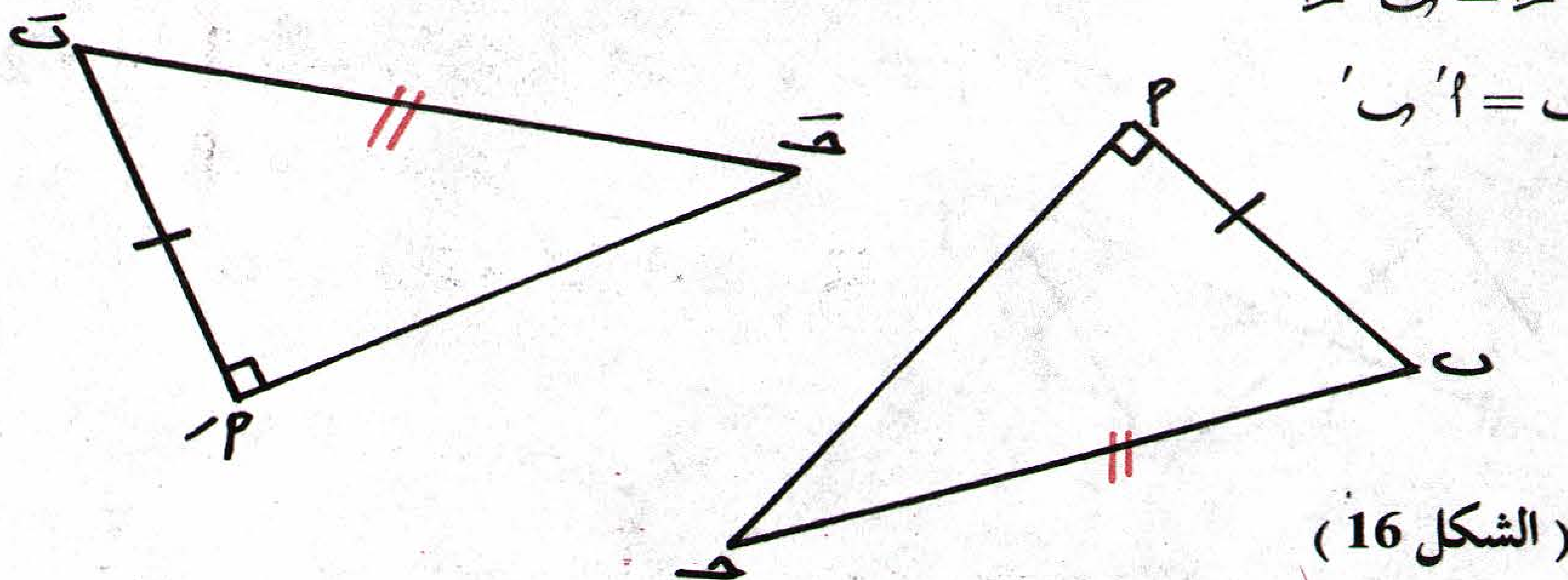
نتيجة 4 :

لكي يتقايس مثلثان قائمان يكفي أن يتقايس وتراهما وتتقايس زاوية حادة من أحدهما مع زاوية حادة من الآخر .

نشاط 2 :

في الشكل (16) . ا ب ح ، ا' ب' ح' مثلثان قائمان في ا و ا' على الترتيب حيث :

• ب ح = ب' ح'
• ا ب = ا' ب'



(الشكل 16)

ـ تحقق باستعمال الورق الشفاف أن هذين المثلثين متقايسان .

• أذكر العناصر المتماثلة لهذين المثلثين .

نتيجة 5 :

لكي يتقايس مثلثان قائمان يكفي أن يتقايس وتراهما ، وأن يتقايس ضلع قائم من أحدهما مع ضلع قائم من الآخر.

ملاحظة :

تستخدم حالات تقايس المثلثات :

1) لإثبات تقايس مثلثين دون اللجوء إلى تطبيقهما .

2) لإثبات تقايس قطعتين (أو زاويتين) وذلك بالبحث عن مثلثين متقايسين تكون فيهما القطعتان (أو الزاويتان) متماثلتين .

مسألة محلولة

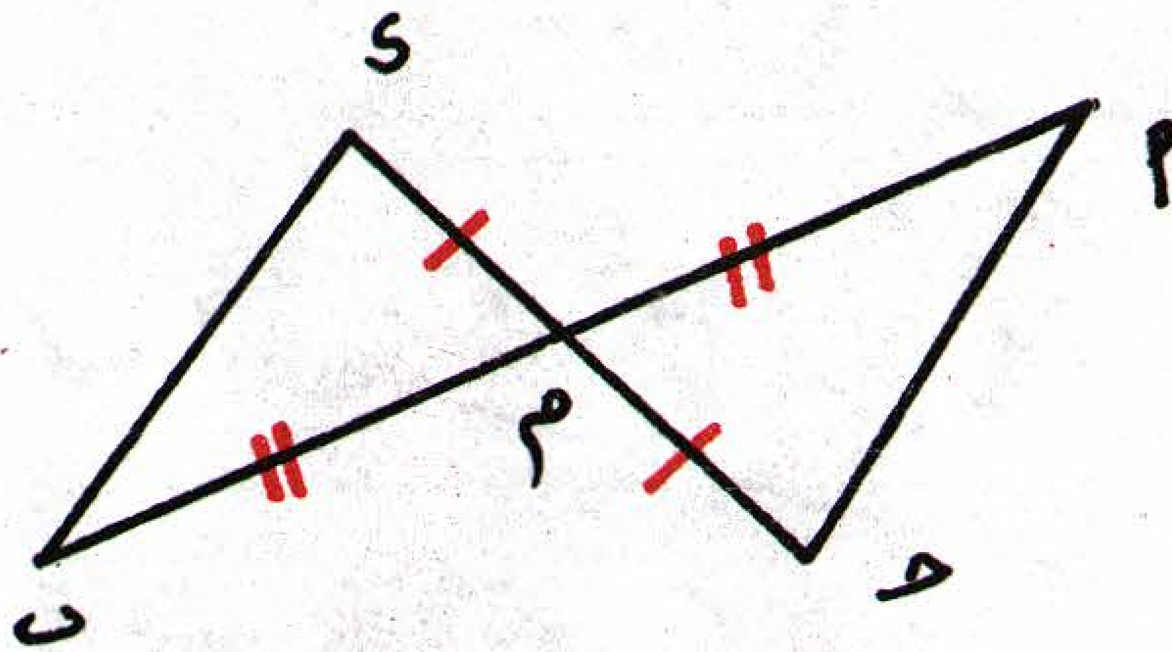
نص المسألة :

[أ ب] ، [حـ ء] قطعتان لهما نفس المنتصف م (الشكل 17) .

بيّن أن :

1) القطعتين [أ حـ] ، [ب ء] متقايستان .

2) [أ م ، أ حـ] تقايس [ب م ، ب ء] .



(الشكل 17)

المعطيات

م منتصف [أ ب]

م منتصف [حـ ء]

المطلوب

1) [أ حـ] ، [ب ء] متقايستان .

2) [أ م ، أ حـ] تقايس [ب م ، ب ء] .

البرهان :

لاحظ أن القطعتين [أ حـ] ، [ب ء] هما ضلعان من المثلثين م أ حـ ، م ب ء على الترتيب .

ولدينا :

- م أ = م ب (لأن م منتصف [أ ب])
- م حـ = م ء (لأن م منتصف [حـ ء])
- $\widehat{\text{أ م حـ}} = \widehat{\text{ب م ء}}$ ([م أ ، م حـ] ، [م ب ، م ء] متقابلتان بالرأس .)

فالمثلثان أ م حـ ، ب م ء متقايسان (حسب النتيجة 2) .

وينتج أن عناصرهما المتماثلة متقايسة ومنه :

أ حـ = ب ء ،

$\widehat{\text{م أ حـ}} = \widehat{\text{م ب ء}}$.

فالقطعتان [أ حـ] و [ب ء] متقايستان .

والزاويتان [أ م ، أ حـ] ، [ب م ، ب ء] متقايستان .

- برهن على هاتين النتيجتين باستخدام التناظر بالنسبة إلى م .

التَّمَـــارِيـــنُ

1. أنشىء مثلثا $\widehat{أ ب جـ}$ بحيث يكون :
   1) أ ب = 4 سم ، $\widehat{أ} = 72^0$ ، $\widehat{ب} = 40^0$.
   2) أ جـ = 4,5 سم ، $\widehat{أ} = 56^0$ ، $\widehat{جـ} = 68^0$.
   3) ب جـ = 5 سم ، ب = 45^0 ، جـ = 50^0 .
2. أنشىء مثلثا $\widehat{أ ب جـ}$ يكون :
   1) أ ب = 4 سم ، $\widehat{أ} = 60^0$ ، أ جـ = 3 سم .
   2) أ ب = 5 سم ، $\widehat{ب} = 54^0$ ، ب جـ = 6 سم .
   3) أ جـ = 4,5 سم ، جـ = 72^0 ، ب جـ = 6,5 سم .
3. أنشىء مثلثا أ ب جـ بحيث يكون :
   1) أ ب = 3 سم ، أ جـ = 4 سم ، ب جـ = 5 سم .
   2) أ ب = 4 سم ، أ جـ = 3,5 سم ، ب جـ = 7 سم .
   3) أ ب = 4,5 سم ، أ جـ = 4,5 سم ، ب جـ = 6 سم .
4. أنشىء مثلثا أ ب جـ قائما في أ بحيث يكون :
   1) أ ب = 4 سم ، ب = 36^0 .
   2) أ ب = 4 سم ، $\widehat{ب}$ ب جـ = 5 سم .
   3) أ جـ = 5 سم ، جـ = 48^0 .
5. [ب س ، ب ع] زاوية ؛ جـ ∈ [ب س ، أنشىء زاوية [جـ ب ، جـ ص] تقايس [ب س ، ب ع] . بحيث [جـ ص يقطع [ب ع في النقطة أ .
   منصفا [ب أ ، ب جـ] ، [جـ أ ، جـ ب] يقطعان [أ جـ] ، [أ ب] في ب′ ، جـ′ على الترتيب .
   1) برهن أن المثلثين جـ′ب جـ ، ب′ب جـ متقايسان .
   2) نضع [ب ب′] ∩ [جـ جـ′] = {م} ، برهن أن المثلثين م جـ′ب ، م ب′جـ متقايسان .
6. أ ب جـ مثلث فيه أ ب < أ جـ ، د نقطة من [أ جـ] بحيث : أ د = أ ب
   هـ نقطة من [أ ب] بحيث أ هـ = أ جـ .

- بيّن أن المثلثين ا ب حـ ، ا ى هـ متقايسان . واستنتج أن : هـ ى = ب حـ .

7. ا ب حـ مثلث ، [ا ى] متوسط متعلق بالضلع [ب حـ] .
هـ نظيرة ا بالنسبة إلى النقطة ى .
- برهن على أن ى ا حـ = ى هـ ب واستنتج أن (ا حـ) // (ب هـ) .

8. ا ب حـ ، ا′ ب′ حـ′ مثلثان بحيث ا ب = ا′ ب′ ، ب حـ = ب′ حـ′ ومحيطاهما متساويان .
- برهن أن هذين المثلثين متقايسان .

9. ا ب حـ مثلث ، [ب س] و [حـ ع] منصفا الزاويتين [ب ا ، ب حـ] و [حـ ا ، حـ ب] على الترتيب . [ب س] ∩ [حـ ع] = {م} .
ا′ ، ب′ ، حـ′ هي المساقط العمودية للنقطة م على (ب حـ) ، (ا حـ) ، (ا ب) على الترتيب .
1) بيّن أن المثلثين م ب ا′ ، م ب حـ′ متقايسان .
2) أثبت أن : م ا′ = م ب′ = م حـ′ .

10. ا ب حـ مثلث متساوي الساقين قاعدته [ب حـ] ، ى ∈ [ا ب] ، هـ ∈ [ا حـ] . بحيث ا ى = ا هـ .
1) برهن أن القطعتين [ى حـ] ، [هـ ب] متقايستان .
2) برهن أن الزاويتين [ب هـ ، ب حـ] ، [حـ ى ، حـ ب] متقايستان .

11. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ، النقطتان ى ، هـ هما على الترتيب نظيرتا ب ، حـ بالنسبة إلى ا .
1) بيّن أن القطعتين [ب حـ] و [ى هـ] متقايستان .
2) ك هي منتصف الضلع [ب حـ] والمستقيم (ا ك) يقطع (ى هـ) في ل . بيّن أن (ا ل) متوسط للمثلث ا ى هـ .

12. (س س′) ، (ع ع′) مستقيمان متوازيان . ا ، حـ نقطتان من (س س′) . ب ، ى نقطتان من (ع ع′) بحيث ا حـ = ب ى .
- برهن أن [ا ب] ، [حـ ى] متقايستان وحامليهما متوازيان .

13. [ا ب] قطعة مستقيمة . [ا ب ، ا س] ، [ب ا ، ب ع] زاويتان متقايستان وفي جهتين مختلفتين بالنسبة إلى (ا ب) .

م منتصف [اب] ، (ق) مستقيم يشمل م ويقطع [اس و [ب ع في النقطتين ح ، ى على الترتيب .

1) بيّن أن ب ى = ا ح

2) بيّن أن (ا ى) // (ب ح) .

14. [ب ح] ، [ب′ ح′] قطعتان متقايستان حيث ب ، ح ، ب′ ، ح′ على استقامة واحدة ، م ، م′ منتصفاهما على الترتيب .

ـ أنشىء [م س ، [م′ ع بحيث ب م س = ب′ م′ ع . عيّن على [م س ، [م′ ع نقطتين ا ، ا′ بحيث م ا = م′ ا′ .

1) أثبت أن المثلثين ا ب م ، ا′ ب′ م′ متقايسان .

2) أثبت أن [ا ح] ، [ا′ ح′] متقايستان وحامليهما متوازيان .

3) ى نظيرة ا بالنسبة إلى م ، ى′ نظيرة ا′ بالنسبة إلى م′ .

ـ بيّن أن ا ى = ا′ ى′ و (ا ى) // (ا′ ى′) .

15. ا ب ح مثلث . [ا س هو منصف [ا ب ، ا ح] و [ا س ∩ [ب ح] = { ى } .

ـ أنشىء قطعة مستقيمة [ا′ ح′] تقايس [ا ح] و [ا′ ع نصف مستقيم حيث ب ا ح = ح′ ا′ ع .

[ا′ س′ هو منصف الزاوية [ا′ ح′ ، ا′ ع] ، ى′ هي نقطة من [ا′ س′ بحيث ا ى = ا′ ى′ . ضع (ح′ ى′) ∩ [ا′ ع = { ب′ } .

1) بيّن أن ا ى ح = ا′ ى′ ح′ .

2) بيّن أن ا ب = ا′ ب′ ؛ ب ح = ب′ ح′ .

16. (س س′) ، (ع ع′) مستقيمان متوازيان (ق) مستقيم عمودي عليهما في النقطتين ا ، ب على الترتيب . م منتصف [ا ب] ، (ك) مستقيم يشمل م ويقطع (س س′) ، (ع ع′) في النقطتين ط ، ل على الترتيب .

1) برهن أن م ط = م ل .

2) محور القطعة [ط ل] يقطع (س س′) و (ع ع′) في النقطتين ح ، ى على الترتيب . برهن أن م ح = م ى .

3) برهن أن القطعتين [ط ى] ، [ح ل] متقايستان وحامليهما متوازيان .

5 الضرب في ص

1. جداء عددين صحيحين :

تعريف :

جداء عددين صحيحين ا ، ب هو العدد الصحيح ح الذي قيمته المطلقة هي جداء قيمتيهما المطلقتين وإشارته :

+ إذا كان للعددين ا ، ب نفس الإشارة .

− إذا كان للعددين ا ، ب إشارتان مختلفتان .

نكتب : ح = ا × ب (ا و ب هما عاملا الجداء ح .)

نكتب أيضا ح = ا . ب أو ح = ا ب

أمثلة :

$(+15)\times(+4)=(+60)$ ؛ $(-9)\times(-7)=(+63)$ ؛

$(-13)\times(+9)=(-177)$ ؛ $(+5)\times(-8)=(-40)$ ؛

$(-21)\times(-1)=(+21)$ ؛ $(-72)\times(+1)=(-72)$ ؛

$(+83)\times 0=0$

2. الضرب في ص :

تلاحظ أنه يمكن أن نرفق كل ثنائية مرتبة (ا ، ب) من ص × ص بالعدد الصحيح الوحيد ا ب الذي هو جداء العددين الصحيحين ا ، ب .

تعريف :

التطبيق من ص × ص إلى ص الذي يرفق كل ثنائية مرتبة (أ ، ب) بالجداء أ . ب يسمى عملية الضرب في ص .

نرمز لعملية الضرب بالرمز × ونكتب :

ص × ص ← ص

(أ ، ب)↦ أ . ب .

1) عين صورة كل من الثنائيات المرتبة الآتية بالضرب في ص :

أ) (+3 ، +13) ؛ (−4 ، −15) ؛ (+2 ، −9) ؛ (−5 ، +6)

ب) (+2 ، +6) ؛ (−3 ، −4) ؛ (−12 ، −1) ؛ (+4 ، +3) ماذا تلاحظ ؟

2) أكمل الجدول الآتي ثم قارن بين | س | . | ع | و | س . ع | :

س	ع	| س |	| ع |	س.ع	| س | × | ع |	| س.ع |
−2	+7					
+12				−36		
	−8			−64		
−9	−18					

3. خواص الضرب في ص :

1) التبديل :

أكمل الجدول الآتي :

أ	ب	أ.ب	ب.أ
(5+)	(7+)		
(2−)	(9−)		
(5+)	(4−)		
(3−)	(6+)		

تجد في كل حالة أن أ . ب = ب . أ

بصفة عامة :

مهما يكن العددان الصحيحان أ ، ب فإن :

أ . ب = ب . أ

نقول إن الضرب في ص عملية **تبديلية** .

2) التجميع :

أكمل الجدول الآتي :

أ	ب	ح	أ.ب	ب.ح	(أ.ب).ح	أ(ب.ح)
(9−)	(7+)	(5+)				
(5+)	(3−)	(8−)				
(6−)	(8+)	(5−)				
(2+)	(4−)	(9−)				
(7−)	(9−)	(4−)				

نجد في كل حالة أن : (أ . ب) . حـ = أ . (ب . حـ)

بصفة عامة :

مهما تكن الأعداد الصحيحة أ ، ب ، حـ فإن :

(أ . ب) . حـ = أ . (ب . حـ)

نقول إن الضرب في ص عملية **تجميعية**

ملاحظة :

يمكن أن نكتب (أ . ب) . حـ = أ . (ب . حـ) = أ . ب . حـ

احسب بطريقتين كلاً مما يلي :

$(+5)\times(-4)\times(-6)$ ؛ $(-3)\times(+7)\times(-9)$ ؛

$(-8)\times(-5)\times(-7)$

3) العنصر الحيادي :

احسب الجداءات الآتية :

$(-10)\times(+1)$ و $(+1)\times(-10)$ ؛ $(+5)\times(+1)$ و $(+1)\times(+5)$

$(+1)\times 0$ و $0\times(+1)$ ؛ $(-1)\times(+1)$ و $(+1)\times(-1)$

نجد في كل حالة أن : أ $\times(+1) = (+1)\times$ أ = أ

بصفة عامة :

مهما يكن العدد الصحيح أ فإن :

أ . (+1) = (+1) . أ = أ

نقول إن العدد الصحيح (+1) هو العنصر الحيادي بالنسبة إلى عملية الضرب في ص.

4) توزيع الضرب بالنسبة إلى الجمع والطرح في ص :

أكمل الجدول الآتي :

أ	ب	حـ	ب+حـ	أ.(ب+حـ)	أ.ب	أ.حـ	(أ.ب)+(أ حـ)
(7−)	(5+)	(9−)					
(3−)	(10−)	(2−)					
(5+)	(2+)	(6−)					

تجد في كل حالة أن أ . (ب + حـ) = (أ . ب) + (أ . حـ)

بصفة عامة :

مهما تكن الأعداد الصحيحة أ ، ب ، حـ فإن :
أ . (ب + حـ) = (أ . ب) + (أ . حـ)

نقول إن عملية الضرب في ص توزيعية بالنسبة إلى عملية الجمع في ص.
نقبل أيضا أنه :

مهما تكن الأعداد الصحيحة أ ، ب ، حـ فإن :
أ . (ب − حـ) = (أ . ب) − (أ . حـ)

نقول إن عملية الضرب في ص توزيعية بالنسبة إلى عملية الطرح في ص.

خلاصة :

عملية الضرب في ص تبديلية وتجميعية ولها عنصر حيادي هو العدد الصحيح (+1)، وهي توزيعية بالنسبة إلى كل من الجمع والطرح في ص.

ملاحظة :

أ ، ب عددان صحيحان.

• إذا كان أب = 0 إما أ = 0 أو ب = 0

• إذا كان أ = 0 أو ب = 0 فإن أب = 0

5) **المساواة والضرب :**

• نقبل ما يلي :

أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد صحيحة :

إذا كان أ = ب فإن أ حـ = ب حـ

• **مسألة :**

أ ، ب عددان صحيحان ، حـ عدد صحيح غير معدوم حيث أ . حـ = ب . حـ
لنبرهن أن أ = ب.

البرهان :

لدينا أ . حـ = ب . حـ من المعطيات

بما أن العددين أ . حـ ، ب . حـ متساويان فإن فرقهما معدوم.

أي : أ . حـ − ب . حـ = 0

ومنه (أ − ب) . حـ = 0 لأن الضرب في ص توزيعي على الطرح.

ولدينا الجداء (أ − ب) . حـ معدوم و حـ غير معدوم.

إذن أ − ب = 0 وهذا يعني أن أ = ب.

نظرية :

> **أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة حيث حـ ≠ 0 :**
> **إذا كان أ . حـ = ب . حـ فإن أ = ب**

ملاحظة هامة :

المساواة أ × 0 = ب × 0 لا تعني أن أ = ب

مثلاً : (− 18) × 0 = (+ 13) × 0 لكن (− 18) ≠ (+ 13) .

6) الترتيب والضرب في ص :

مسألة 1 :

أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة حيث أ ⩽ ب ، حـ > 0

لنثبت أن أ . حـ ⩽ ب . حـ .

البرهان :

تعلم أن أ ⩽ ب معناه (أ − ب) ∈ ص+ .

لنبين أن (أ حـ − ب حـ) ∈ ص+ .

بما أن (أ − ب) ∈ ص+ ، حـ > 0 فإن (أ − ب) . حـ ∈ ص+ .

لكن (أ − ب) . حـ = أ . حـ − ب حـ

ومنه (أ حـ − ب حـ) ∈ ص+ أي أ حـ ⩽ ب حـ .

نظرية :

> **أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة :**
> **إذا كان أ ⩽ ب ، حـ > 0 فإن أ حـ ⩽ ب حـ**

• برهن على النظرية الآتية :

أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة :
إذا كان أ حـ ≤ ب حـ ، حـ > 0 فإن أ ≤ ب

مسألة 2 :

أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة حيث أ ≤ ب ، حـ < 0
لنثبت أن أ حـ ≥ ب حـ .

البرهان :

نعلم أن أ ≤ ب معناه أ − ب ∈ ص+ .
لنبين أن أ حـ − ب حـ ∈ ص− .
بما أن أ − ب ∈ ص+ و حـ < 0 فإن (أ − ب) . حـ ∈ ص−
لأن جداء عددين صحيحين مختلفين في الإشارة هو عدد صحيح سالب
ولكن (أ − ب) . حـ = أ حـ − ب حـ .
ومنه (أ حـ − ب حـ) ∈ ص− ، أي أ حـ ≥ ب حـ

نظرية :

أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة :
إذا كان أ ≤ ب ، حـ > 0 فإن أ حـ ≤ ب حـ .

برهن على النظرية الآتية :

أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة :
إذا كان أ حـ ≥ ب حـ ، حـ < 0 فإن أ ≤ ب

1) رتب العددين (− 7) ، (+ 5) ثم العددين :
(− 7) × (+ 6) و (+ 5) × (+ 6) .
2) رتب العددين (− 12) ، (− 19) ثم العددين :
(− 3) × (− 12) و (− 3) × (− 19) .
3) س عدد صحيح حيث 15 س ⩽ 27 . بين أن 5 س ⩽ 9 .
4) س ، ع عددان صحيحان حيث − 18 س ⩽ 21 ع بيّن أن 6 س ⩽ − 7 ع .

4 قوة عدد صحيح :

1) تعريف :

ا عدد صحيح ،
الجداء ا . ا يكتب $ا^2$ ويقرأ « ا أس 2 » أو « ا مربع » .
الجداء ا . ا . ا يكتب $ا^3$ ويقرأ « ا أس 3 » أو « ا مكعب » .
• إذا كان ن عددًا طبيعيًا غير معدوم ،
فالجداء ا × ا × ...... × ا يكتب $ا^ن$ ويقرأ « ا أس ن »
ن عاملاً
العدد $ا^ن$ يسمى **القوة النونية** للعدد الصحيح ا ؛
ن هو الأس ، ا هو الأساس .

القوة النونية للعدد الصحيح ا هي جداء ن من العوامل كل منها يساوي ا .

نقبل أن $ا^1$ = ا ؛ $ا^0$ = 1 حيث ا ≠ 0 .

1) احسب ما يلي : $(-1)^3$ ، $(+5)^2$ ، $(-8)^2$ ، $(-1)^5$ ، $(-4)^4$
$(+6)^0$ ، $(-13)^0$ ، $(+1)^0$ ، 1^0 ، 0^2 ، $(-1)^0$.
2) احسب ما يلي :
$(+8)\times(+8)$ ، $(-8).(-8)$ ، $(-2)^4$ ، $(-7)^3$ ، $(-7)\times 3$.

2) خواص القوى :

1) جداء قوتين لنفس العدد الصحيح :

لنحسب $(-3)^2 \times (-3)^3$:

لدينا

$(-3)^2 = (-3) \times (-3)$ و $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3)$.

ومنه

$(-3)^2 \times (-3)^3 = [(-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)] =$
$(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^5$

نستنتج أن : $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$

بصفة عامة :

ن ، م عددان طبيعيان
مهما يكن العدد الصحيح غير المعدوم أ فإن :
$\text{أ}^{\text{ن}} \times \text{أ}^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{ن}+\text{م}}$

احسب كلا مما يلي : $(+2)^3 \times (+2)^2$ ، $(+2)^2 \times (+2)^3$ ،
$(-5)^2 \times (-5)^3$ ، $(-7) \times (-10)^3$ ، $(-7)^3 (-10)$ ،
$(+10)^3 \times (+10)^5$ ، $(-10)^2 \times (+10)$.

2) قوة جداء :

لنحسب $[(-2) \times (+5)]^3$:

لدينا : $[(-2) \times (+5)]^3 =$

$[(-2) \times (+5)] \times [(-2) \times (+5)] \times [(-2) \times (+5)]$

وبما أن الضرب في ص تجميعي وتبديلي فإن : $[(-2)\times(+5)]^3=$

$[(-2)\times(-2)\times(-2)]\times[(+5)\times(+5)\times(+5)]$

ومنه $[(-2)\times(+5)]^3=(-2)^3\times(+5)^3$.

بصفة عامة :

ن عدد طبيعي :
مهما يكن العددان الصحيحان غير المعدومين أ ، ب فإن :
$(أ\,.\,ب)^{ن}=أ^{ن}\,.\,ب^{ن}$

احسب بطريقتين كلا مما يلي :
$[(+3)\times(+2)]^3$ ، $[(+5)\times(-6)]^2$ ، $[(-2)\times(-2)]^4$ ،
$(-2)^3\times(-2)\times(-2)^2$ ، $(-4)\times(-4)^5\times(-4)^0$

3) حساب قوة لقوة أخرى :

لنحسب $[(-2)^2]^3$

لدينا $[(-2)^2]^3=(-2)^2\times(-2)^2\times(-2)^2=(-2)^{2+2+2}$

أي أن : $[(-2)^2]^3=(-2)^{2\times3}$

بصفة عامة :

ن ، م عددان طبيعيان .
مهما يكن العددالصحيح غير المعدوم أ فإن :
$(أ^{ن})^{م}=أ^{ن.م}$

احسب بطريقتين كلا مما يلي :

$[(-4)^3]^2$ ، $[(+2)^3]^4$ ، $[(-8)^1]^3$ ، $(أ^3 ب)^4$

نتائج :

احسب $(+2)^3$ ، $(-2)^4$ ، $(-3)^3$ ، $(+3)^4$ ، $(-5)^3$ ، $(-1)^6$.

بصفة عامة :

قوة عدد صحيح موجب هي عدد صحيح موجب

قوة عدد صحيح سالب هي عدد صحيح :

- **موجب إذا كان الأس زوجيًا .**
- **سالب إذا كان الأس فرديًا .**

التَّمَـــارِيـــنُ

1. ما هي صورة كل من الثنائيات المرتبة الآتية بواسطة الضرب في ص

(21 + ، 2 +) ، (9 + ، 6 −) ؛ (5 + ، 12 +) ؛ (7 + ، 3 −)

(14 + ، 3 +) ؛ (1 − ، 21 +) ؛ (39 + ، 1 +) ؛ (1 − ، 0)

2. احسب الجداءات الآتية :

(40+)(11+) ، (4+)(25−) ، (15−)(9−) ، (18+)(2+)

(18+)(14+) ، (36−)(32−) ، (1−)(253−) ، (321+)(1+)

3. أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة

أكمل الجدول الآتي

أ	ب	حـ	أ.ب	(أ.ب).حـ	ب.حـ	أ.(ب.حـ)
15+	12−	8+				
18−	24 +	11 −				
7−			63−		126+	
	6−				72−	288 −
	2+	14−	16−			
	30−			150+	150−	

4. احسب بطريقتين كلا مما يلي :

1) (12 −) (3 −) (4 −)

2) (7 +) (1 −) (25 +)

3) (3 −) (8 +) (5 −)

5. احسب بطريقتين كلا مما يلي :

1) (15 +) × [(2 +) + (8 −)]

2) (3 −) × [(18 −) − (5 −)]

3) [(21 +) + (34 −)] × (9 −)

4) [(43 −) − (32 −)] × (1 −)

6. ا ، ب ، حـ أعداد صحيحة

أكمل الجدول الآتي

ا	ب	حـ	ا + ب	(ا + ب) . حـ	ا حـ + ب حـ	ا − ب	(ا − ب) . حـ	ا حـ − ب حـ
− 3	− 5	− 4						
+ 8	− 7	+ 6						
− 9	+ 2	− 10						

7. ا ، ب عددان صحيحان حيث :

ا + (− 3) = (+ 3) ب + (+ 4)

بين أن :

1) (+ 2) ا + (− 6) = (+ 6) ب + (+ 8)

2) (− 4) ا + (+ 12) = (− 12) ب + (− 16)

8. ا ، ب عددان صحيحان حيث :

(+ 2) ا + (+ 12) ⩽ (+ 3) ب + (− 5)

بين أن :

1) (+ 10) ا + (+ 60) ⩽ (+ 15) ب + (− 25)

2) (− 18) ا + (− 108) ⩾ (− 27) ب + (+ 45)

9. ا عدد صحيح حيث :

(− 2) ا ⩽ (+ 28)

قارن بين :

1) (− 14) ا و (+ 196)

2) (+ 16) ا و (− 224)

10. س عدد صحيح حيث :

$(-30) \leqslant (+6)\,\text{س} < (+51)$

أكمل ما يلي :

1) $\ldots \leqslant (+2)\,\text{س} < \ldots$

2) $\ldots \geqslant (-2)\,\text{س} \geqslant \ldots$

11. س عدد صحيح

أكمل ما يلي :

1) يكون $\text{س} + (-4)$ موجبا إذا كان $\text{س} < \ldots$

2) يكون $\text{س} + (+3)$ سالبا إذا كان $\text{س} \leqslant \ldots$

3) يكون $\text{س} + (-15)$ موجبا إذا كان $\text{س} \geqslant \ldots$

4) يكون $\text{س} + (+18) < +15$ إذا كان $\text{س} < \ldots$

5) يكون $\text{س} + (-12) \leqslant (-9)$ إذا كان $\text{س} \leqslant \ldots$

12. احسب كلا من :

1) $(-7) + (-7) + (-7)$ و $(-7)^3$ ماذا تلاحظ ؟

2) $(-8)^4$ و $4 \times (-8)$ ماذا تلاحظ ؟

3) $(+9)^2$ و $2 \times (+9)$ ماذا تلاحظ ؟

13. احسب كلا مما يلي :

$(-4)^2$ ؛ $(-4)^3$ ؛ $(-5)^3$ ؛ $(-1)^6$ ؛ $(-1)^7$ ؛ 0^{10}

14. احسب كلا مما يلي بطريقتين

1) $(-3)^4 \times (-3)^2$ ، $(-5)^2 \times (-5)$ ؛ $(-2)^5 \times (-2)^3$

2) $[(-2)^3]^4$ ؛ $[(-3)^2]^4$ ، $(-2)^3 \times (-2)^4$

15. احسب كلا مما يلي :

$(+5)^3 \times (-3)^2$ ، $(-2)^3$ ، $(-3)^2(+3)^2$ ، $(-3)^2 \times (-5)^2 \times (-1)^2$

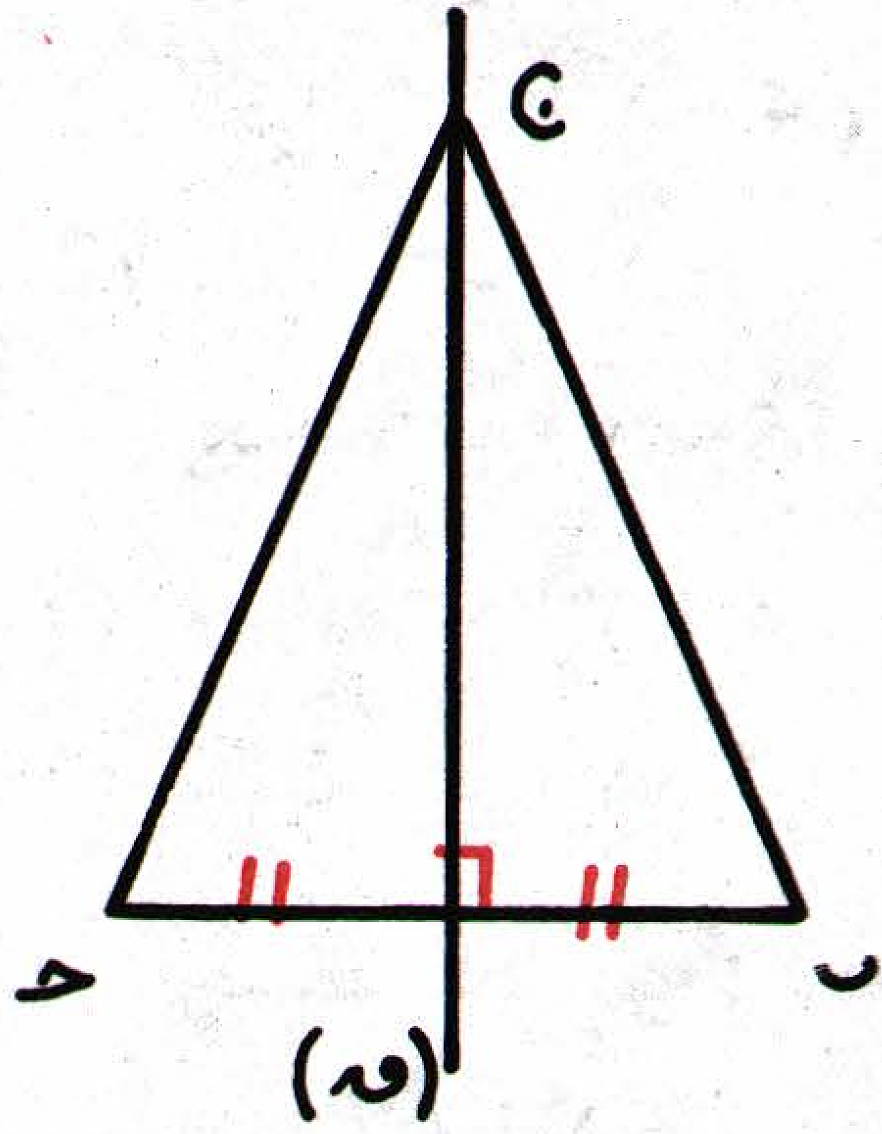
6 خواص هندسية أساسية

1. الخاصة المميزة لمحور قطعة :

مسألة 1 :

[ب حـ] قطعة مستقيمة ، (ق) محورها ، م نقطة من (ق) (الشكل 1)

ـ لنبرهن أن م ب = م حـ .



(الشكل 1)

البرهان :

(ق) محور [ب حـ] يعني أن ب و حـ متناظرتان بالنسبة إلى (ق) .

م ∋ (ق) يعني أن م نظيرة نفسها بالنسبة إلى (ق) .

فالقطعتان [م ب] ، [م حـ] متناظرتان بالنسبة إلى (ق) .

نستنتج أنهما متقايستان .

أي : م ب = م حـ .

نظرية :

إذا كانت م نقطة من محور قطعة مستقيمة فإن م متساوية المسافة عن طرفي هذه القطعة .

مسألة 2 :

[ب حـ] قطعة مستقيمة .

ه نقطة حيث ه ب = ه حـ

ـ لنبرهن أن ه تنتمي إلى محور [ب حـ] .

البرهان :

ـ نرسم المستقيم (ه م) بحيث تكون م هي منتصف [ب حـ] .

المثلثان ه م ب ، ه م حـ متقايسان لأن :

- ه ب = ه حـ . (حسب المعطيات)
- م ب = م حـ . (م منتصف [ب حـ] .)
- [ه م] ضلع مشترك .

(الشكل 2)

نستنتج أن الزاويتين المتماثلتين [م ه ، م ب] و [م ه ، م حـ] متقايستان ، وبما أنهما متجاورتان ومتكاملتان ، إذن كل منهما قائمة .

فالمستقيم (ه م) عمودي على المستقيم (ب حـ) ، ونعلم أن النقطة م هي منتصف [ب حـ] .

فالمستقيم (ه م) هو محور [ب حـ] والنقطة ه تنتمي إليه .

ظرية :

إذا كانت ه نقطة متساوية المسافة عن طرفي قطعة مستقيمة ، فإن النقطة ه تنتمي إلى محور هذه القطعة .

من النظريتين السابقتين نستخلص النظرية الآتية :

محور قطعة مستقيمة هو مجموعة النقط المتساوية المسافة عن طرفي هذه القطعة .

هذه النظرية تسمى **الخاصة المميزة** لمحور قطعة مستقيمة .

نتيجة :

محور قطعة مستقيمة هو محور تناظر لها .

تطبيق : الدائرة المحيطة بمثلث .

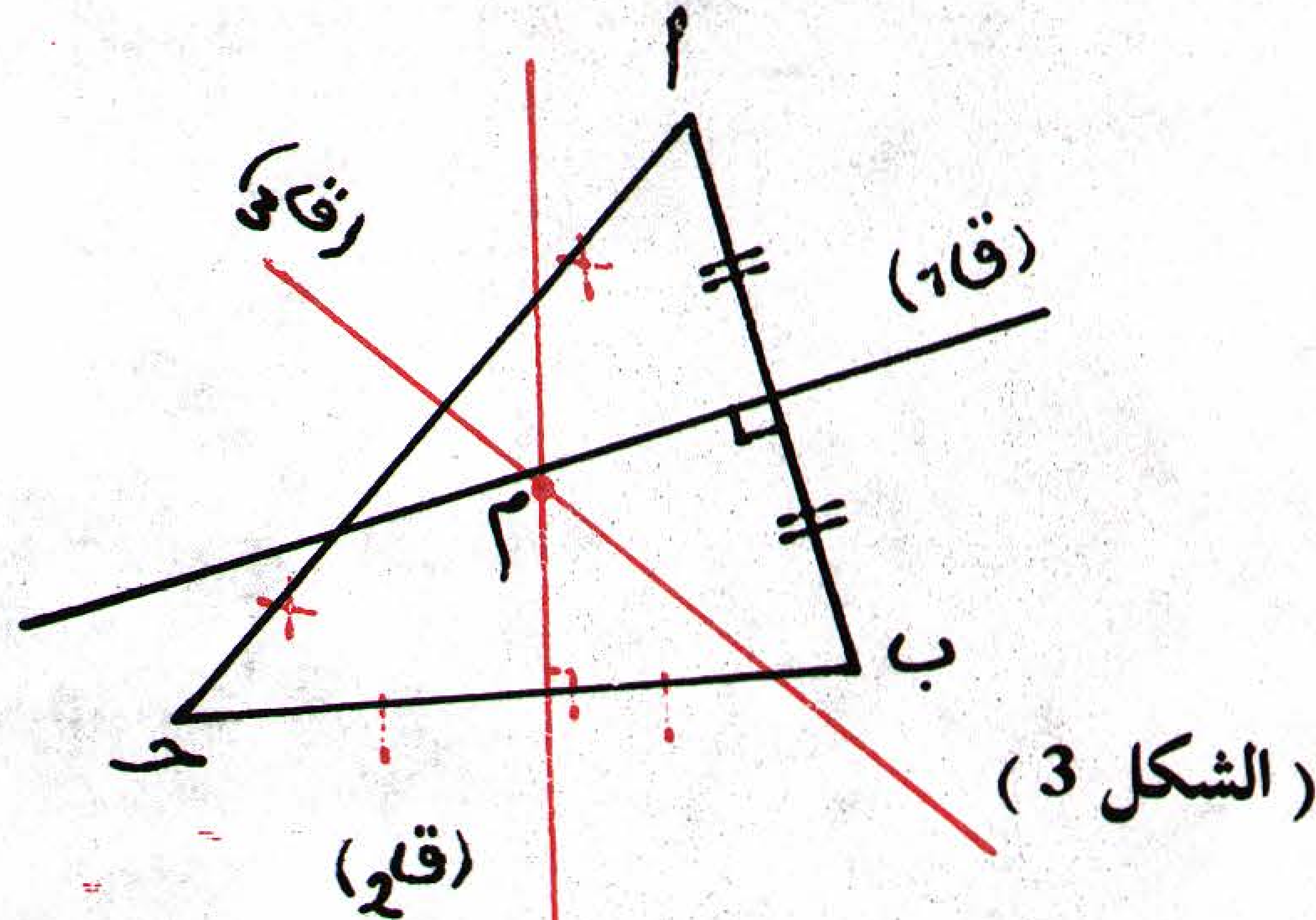
مسألة 1 :

ـ أ ب حـ مثلث ، (ق$_1$) ، (ق$_2$) محورا الضلعين [أ ب] ، [ب حـ] يتقاطعان في النقطة م .

ـ لنبرهن أن :

1) (ق$_3$) محور الضلع [أ حـ] يشمل أيضا م .

2) النقطة م هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث أ ب حـ .



(الشكل 3)

البرهان :

1) لدينا : $(ق_1) \cap (ق_2) = \{م\}$ أي $م \in (ق_1)$ و $م \in (ق_2)$.

$م \in (ق_1)$ يعني أن م ا = م ب .... (1)

$م \in (ق_2)$ يعني أن م ب = م حـ .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : م ا = م حـ .

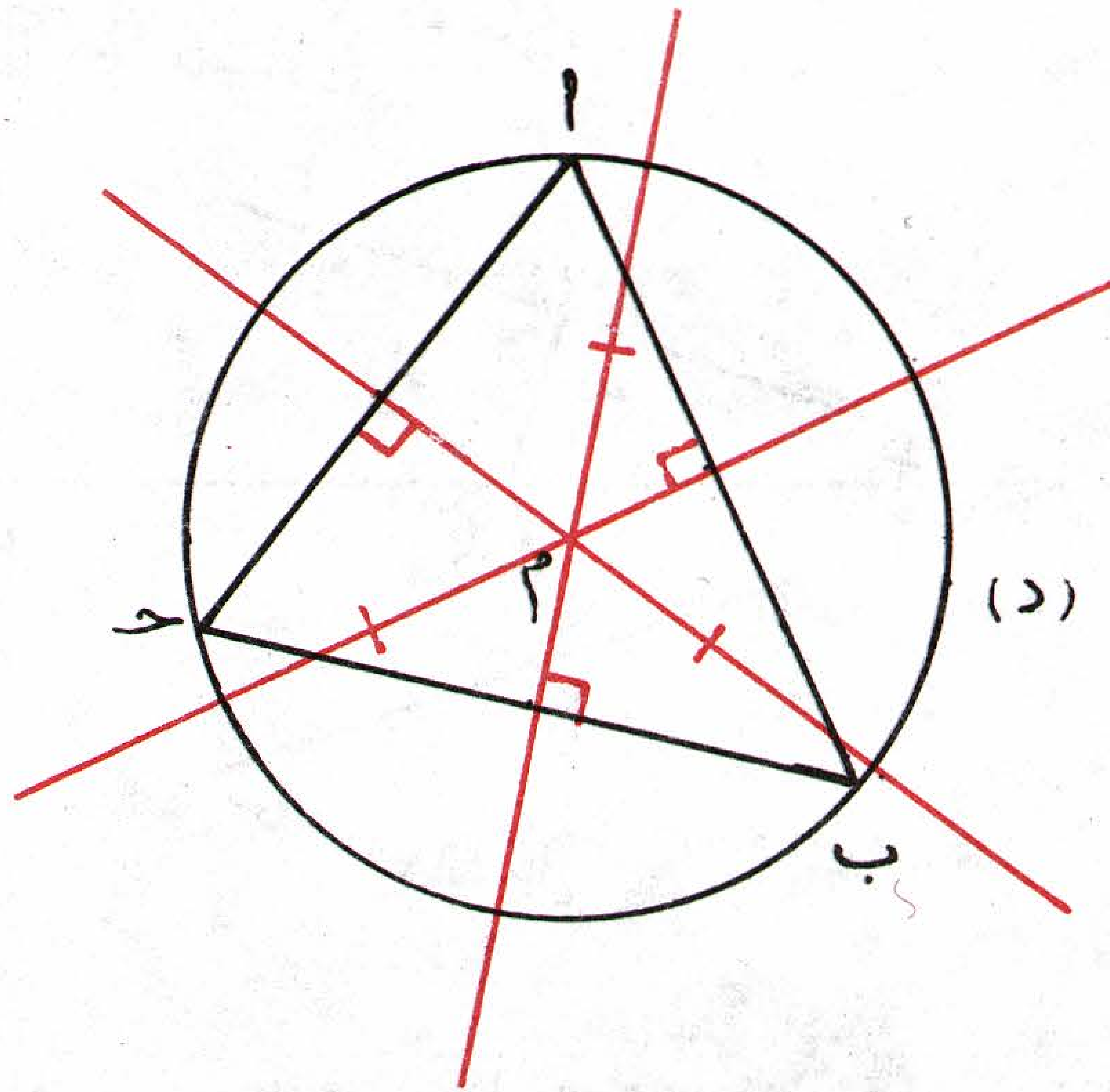
م ا = م حـ يعني أن $م \in (ق_3)$ محور [ا حـ] .

2) لدينا م ا = م ب = م حـ فالنقطة م متساوية المسافة عن رؤوس المثلث ا ب حـ فهي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ا ب حـ .

مسألة 2 :

(ى) دائرة مركزها م ؛ ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من (ى) .

لنبرهن أن م هي نقطة تقاطع المحاور الثلاثة للمثلث ا ب حـ .



(الشكل 4)

البرهان :

بما أن ا ، ب ، حـ نقط من الدائرة (ى) فإن م ا = م ب = م حـ .

م ا = م ب يعني أن م تنتمي إلى محور [ا ب] .

م ب = م حـ يعني أن م تنتمي إلى محور [ب حـ] .

م ا = م حـ يعني أن م تنتمي إلى محور [ا حـ] .

نستنتج أن م هي نقطة تقاطع المحاور الثلاثة للمثلث ا ب حـ .

نظرية :

محاور مثلث تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث .

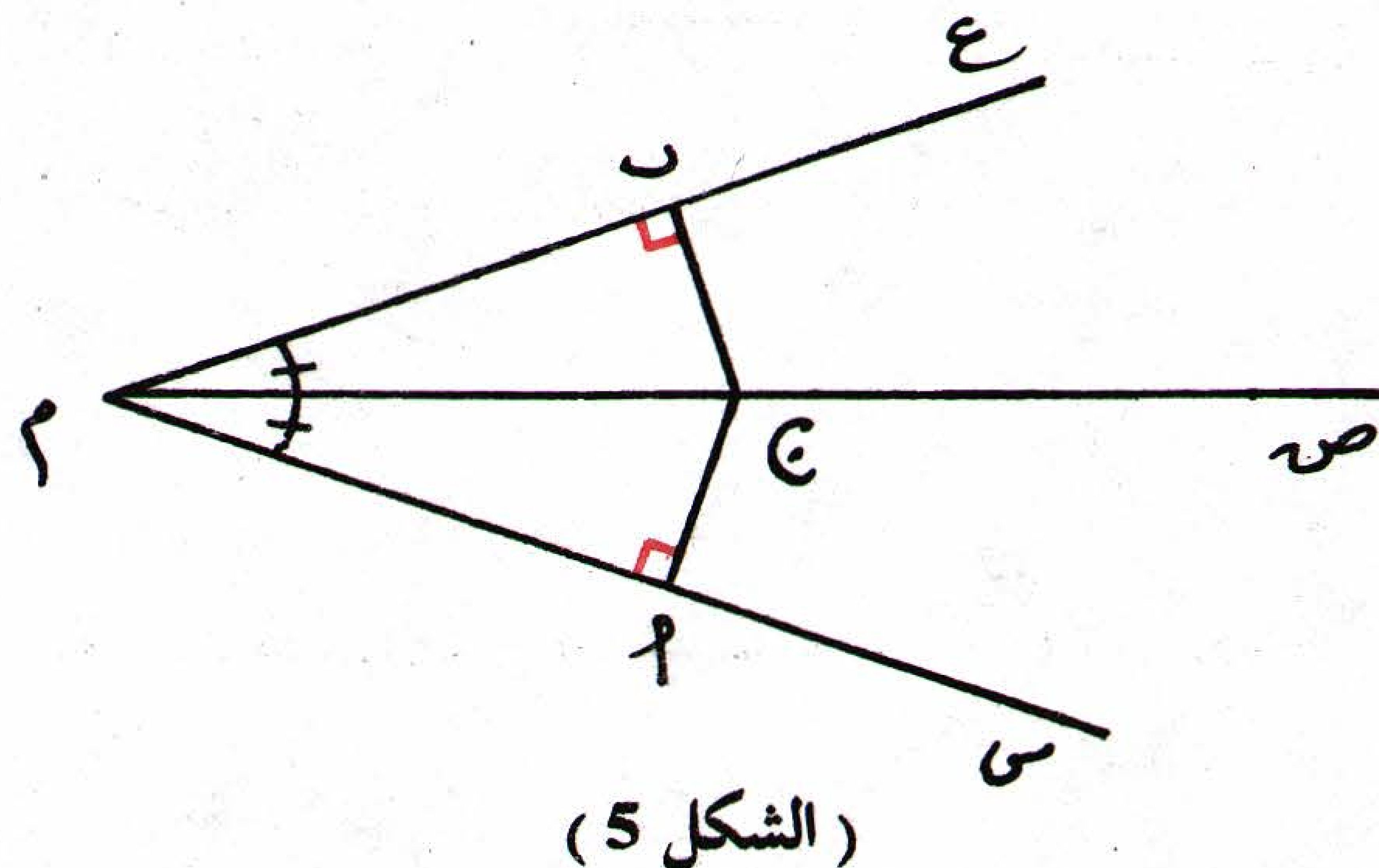
2. الخاصة المميزة لمنصف زاوية :

مسألة 1 :

[م س ، م ع] زاوية ، [م ص منصفها .

ن نقطة من [م ص .

ـ لنبرهن أن النقطة ن متساوية المسافة عن ضلعي الزاوية [م س ، م ع] .



(الشكل 5)

البرهان :

نفرض أن ا ، ب هما على الترتيب المسقطان العموديان للنقطة ن على الضلعين [م س ، [م ع (الشكل 5) .

ـ نعلم أن كلاً من ه ا ، ه ب هي المسافة بين النقطة ه والضلعين [م س ، [م ع على الترتيب .

المثلثان القائمان ه ا م ، ه ب م متقايسان لأن :

- الوتر [م ه] مشترك
- $\widehat{هما} = \widehat{همب}$ (لأن [م ص منصف)

ينتج من تقايسهما أن : ه ا = ه ب .

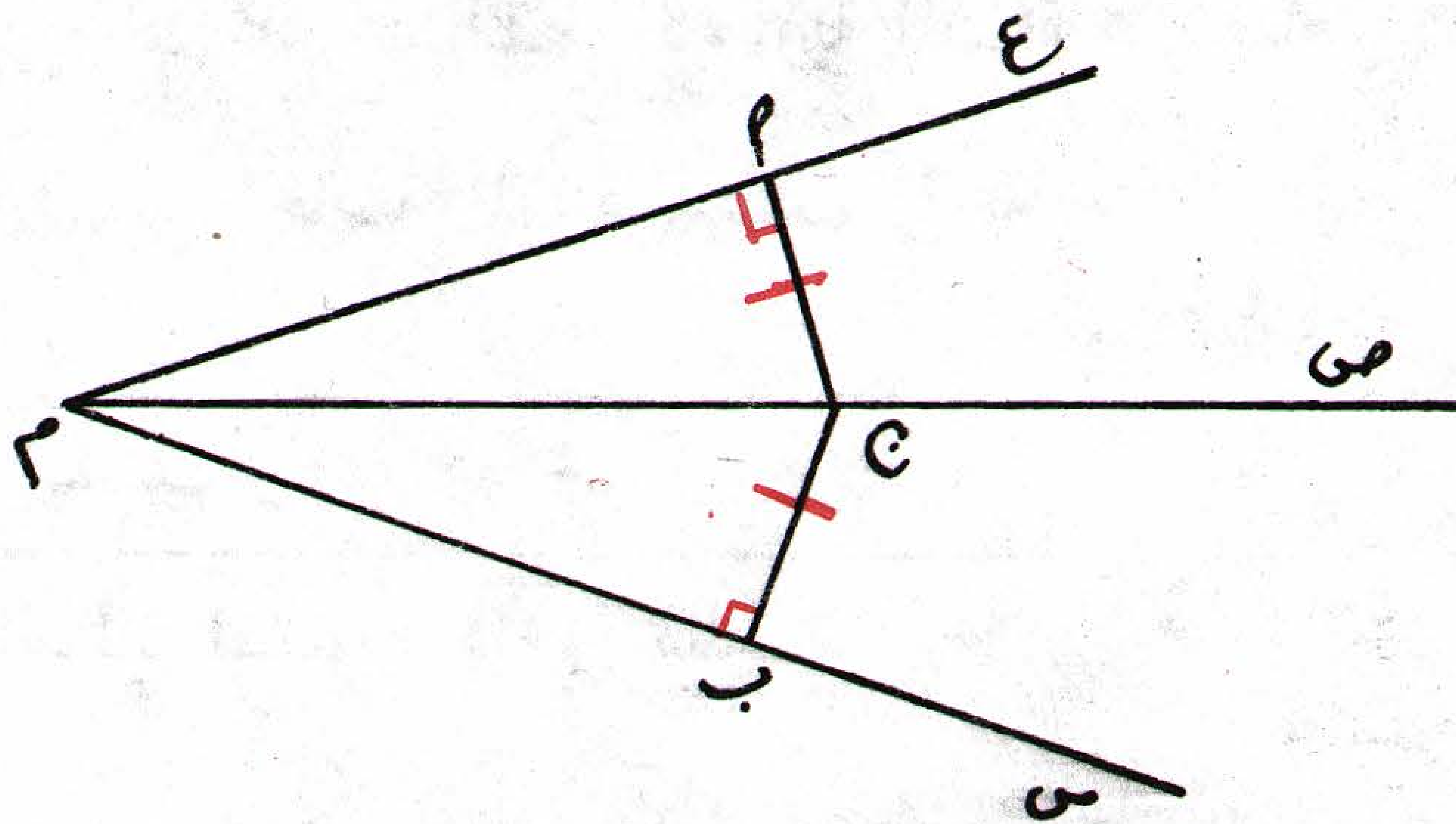
نظرية :

إذا كانت ه نقطة من منصف زاوية فإن ه متساوية المسافة عن ضلعي هذه الزاوية .

مسألة 2 :

[م س ، م ع] زاوية ، ه نقطة متساوية المسافة عن ضلعيها

ـ لنبرهن أن ه تنتمي إلى منصف الزاوية [م س ، م ع] .



(الشكل 6)

البرهان :

نفرض أن ا ، ب هما المسقطان العموديان للنقطة ⅁ على [م س ، [م ع على الترتيب وأن [م ص هو نصف المستقيم الذي يشمل ⅁ . (الشكل 6) .

المثلثان القائمان ⅁ ا م ، ⅁ ب م متقايسان لأن :

- ⅁ ا = ⅁ ب (حسب المعطيات) .
- الوتر [م ⅁] مشترك .

ينتج أن الزاويتين المتماثلتين [م س ، م ص] و [م ص ، م ع] متقايستان ، وهما متجاورتان أيضا ، فنستنتج أن :

[م ص منصف للزاوية [م س ، م ع] و ⅁ ∋ [م ص .

نظرية :

إذا كانت ⅁ نقطة متساوية المسافة عن ضلعي زاوية فإنها تنتمي إلى منصف هذه الزاوية .

من النظريتين السابقتين نستخلص النظرية الآتية :

منصف زاوية هو مجموعة النقط المتساوية المسافة عن ضلعي هذه الزاوية .

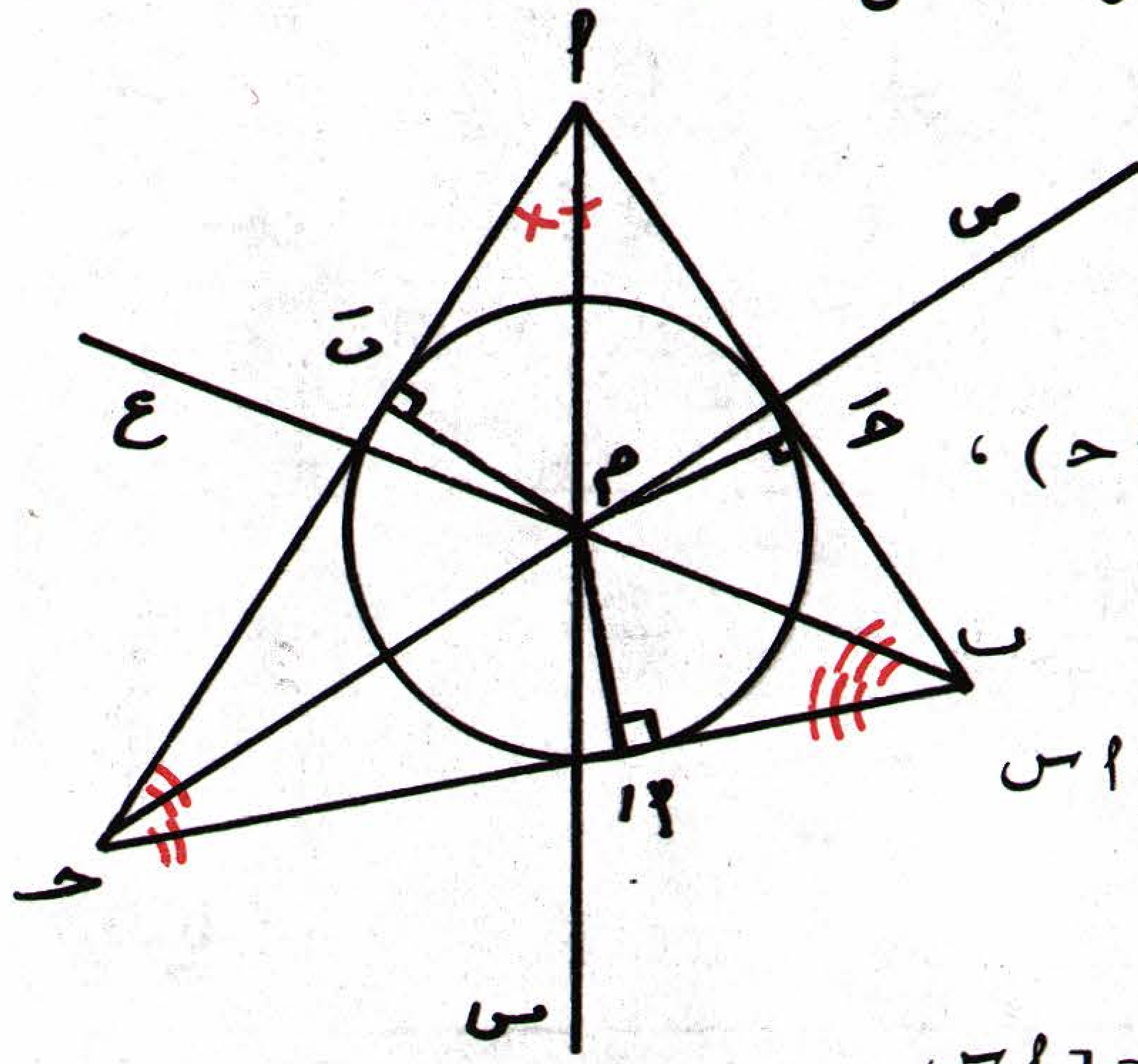
هذه النظرية تسمى **الخاصة المميزة لمنصف زاوية .**

نتيجة : **منصف زاوية هو محور تناظر لها .**

تطبيق : **الدائرة المرسومة داخل مثلث**

ـ ا ب حـ مثلث ، م هي نقطة تقاطع منصفاته الداخلية [ا س ، [ب ع ، [حـ ص .

ـ لنبرهن أن م هي مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب حـ .



(الشكل 7)

البرهان :

نسمي ا َ ، ب َ ، حـ َ المساقط العمودية للنقطة م على (ب حـ) ، (ا حـ) ، (ا ب) على الترتيب (الشكل 7) .

[ا س منصف [ا ب ، ا حـ] و م ∈ [ا س

إذن م ب َ = م حـ َ

[ب ع منصف [ب ا ، ب حـ] و م ∈ [ا س

إذن م حـ َ = م ا َ .

ومنه م ا َ = م ب َ = م حـ َ .

فالنقطة م هي مركز الدائرة التي تشمل ا َ ، ب َ ، حـ َ وهي الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب حـ .

نظرية :

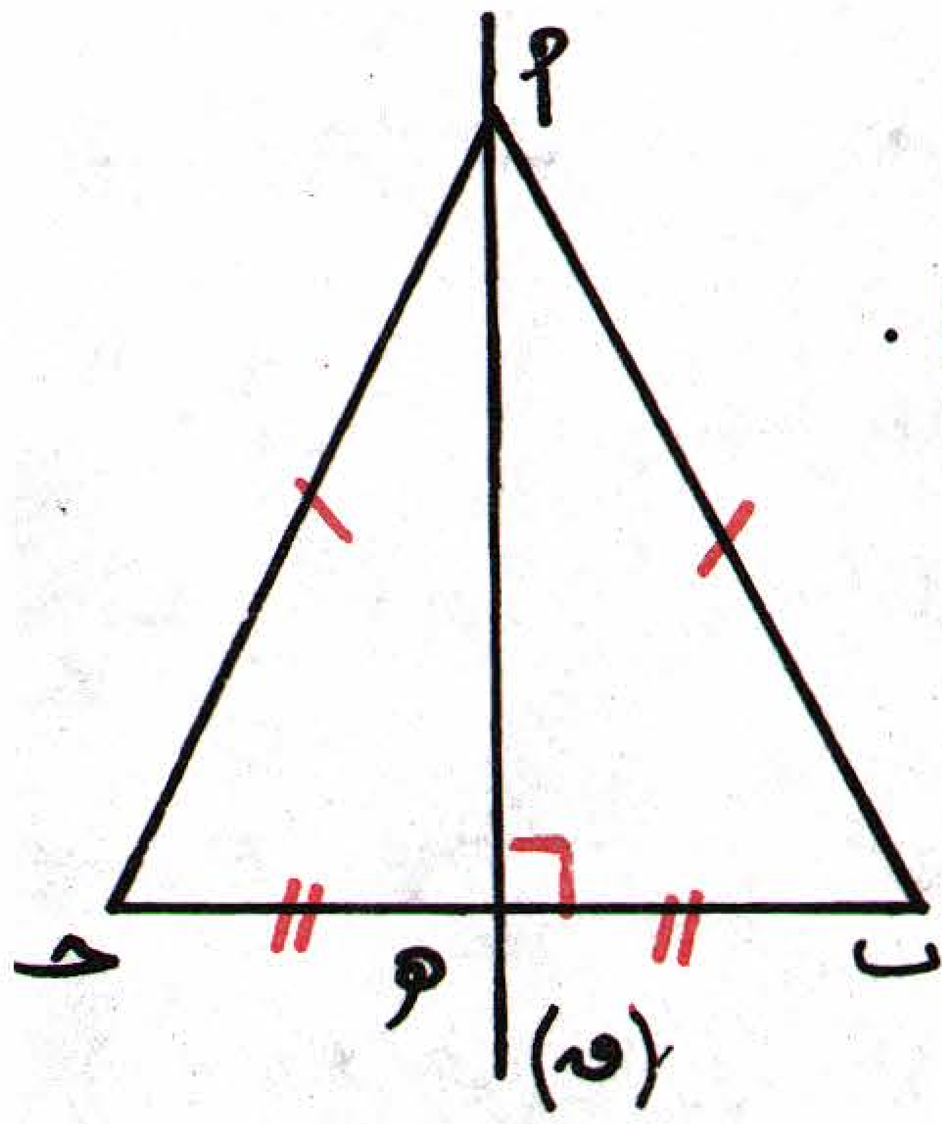
نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لمثلث هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث .

3. خواص المثلث المتقايس الضلعين :

مسألة 1 :

ا ب حـ مثلث متقايس الضلعين ، (ق) محور القاعدة [ب حـ] (الشكل 8)
لنثبت أن (ق) هو محور تناظر لهذا المثلث .

البرهان :



(الشكل 8)

اب = اح يعني أن ا تنتمي إلى (ق) محور [ب ح].
إن نظيرة ا بالنسبة إلى (ق) هي ا نفسها.
ب ، ح متناظرتان بالنسبة إلى (ق).
نستنتج أن نظير المثلث ا ب ح بالنسبة إلى (ق) هو المثلث ا ب ح نفسه ، وهذا يعني أن (ق) هو محور تناظر هذا المثلث.

نظرية :

محور قاعدة المثلث المتقايس الضلعين هو محور تناظره.

نتائج :

– نضع (ق) ∩ [ب ح] = {هـ} (الشكل 8).

1) • المثلثان ا هـ ب ، ا هـ ح متناظران بالنسبة إلى المحور (ا هـ).
فالزاويتان [ب ا ، ب هـ] ، [ح ا ، ح هـ] متناظرتان بالنسبة إلى (ا هـ) إذن هما متقايستان.
لاحظ أن هاتين الزاويتين هما زاويتا قاعدة المثلث المتقايس الضلعين ا ب ح.

نظرية :

زاويتا قاعدة المثلث المتساوي الساقين متقايستان

2) • بما أن المثلثين ا هـ ب ، ا هـ ح متناظران بالنسبة إلى (ا هـ) ، فإن الزاويتين [ا هـ ، ا ب] و [ا هـ ، ا ح] متناظرتان بالنسبة إلى (ا هـ) إذن هما متقايستان.
وهذا يعني أن [ا هـ هو منصف الزاوية [ا ب ، ا ح].

• بما أن المستقيم (اهـ) هو محور القاعدة [ب ج] ، فهو عمودي على (ب ج) ويقطع [ب ج] في منتصفها .
وهذا يعني أن (اهـ) عمود للمثلث ا ب ج ومتوسط له متعلق بالقاعدة [ب ج] .

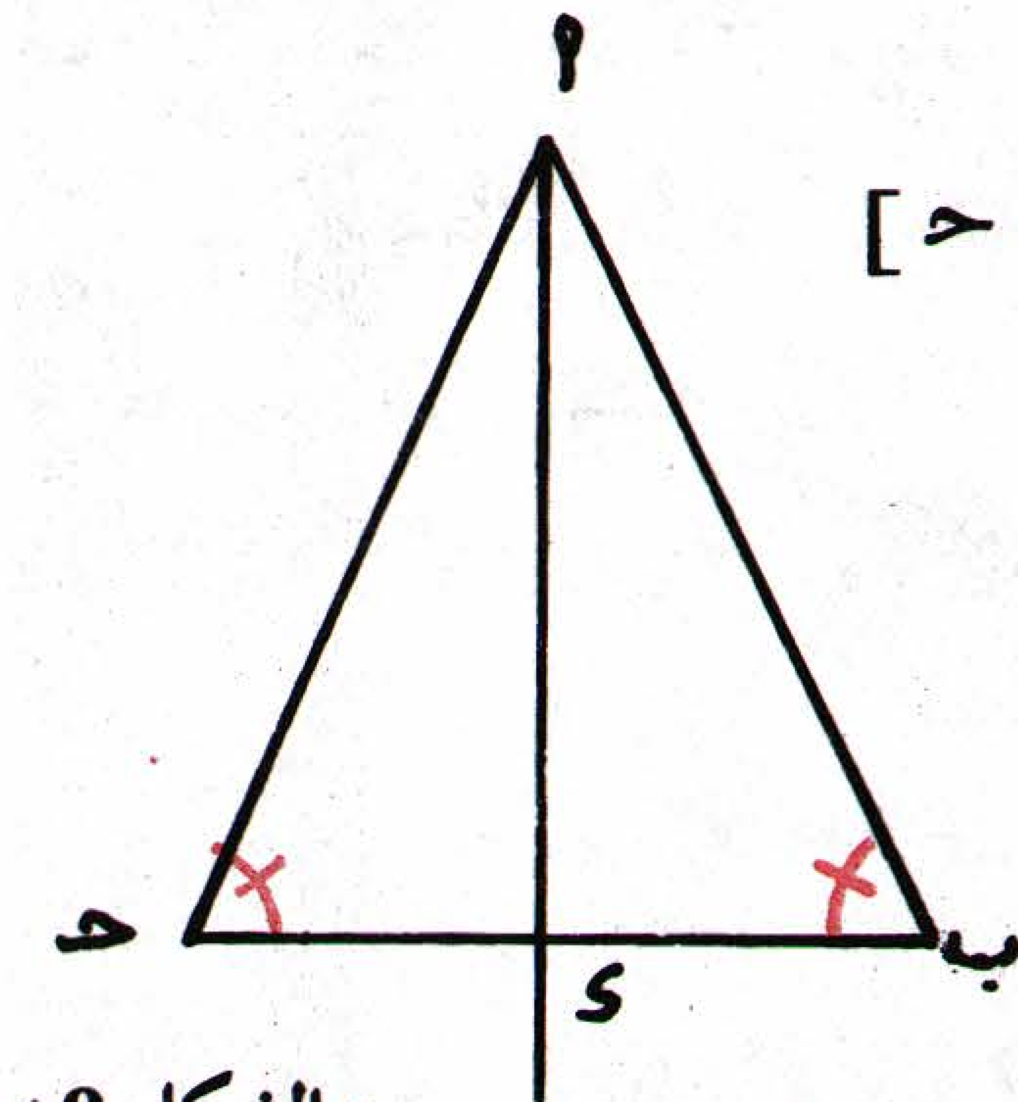
نظرية :

محور قاعدة المثلث المتساوي الساقين هو منصف لزاوية الرأس الأساسي ، وهو عمود ومتوسط متعلقان بهذه القاعدة .

مسألة 2 :

ا ب ج مثلث فيه $\widehat{\text{ابج}} = \widehat{\text{اجب}}$. لنبرهن أن ا ب ج متقايس الضلعين .

البرهان :



(الشكل 9)

نرسم منصف الزاوية [اب ، اج] بحيث يقطع [ب ج] في د (الشكل 9) .

– في المثلثين ا ب د ، ا ج د لدينا :

$\widehat{\text{باد}} + \widehat{\text{ادب}} = 180°$

$\widehat{\text{اجد}} + \widehat{\text{جاد}} + \widehat{\text{ادج}} = 180°$

وبما أن $\widehat{\text{ابج}} = \widehat{\text{اجب}}$ و $\widehat{\text{باد}} = \widehat{\text{جاد}}$ (لأن [اد] منصف)

إذن $\widehat{\text{ادب}} = \widehat{\text{ادج}}$.

فهذان المثلثان متقايسان لأن :

• [اد] ضلع مشترك .
• $\widehat{\text{ادب}} = \widehat{\text{ادج}}$.
• $\widehat{\text{باد}} = \widehat{\text{جاد}}$.

نستنتج أن اب = اج فالمثلث ا ب ج متقايس الضلعين .

نظرية :

إذا تقايست زاويتان في مثلث فإن هذا المثلث متساوي الساقين.

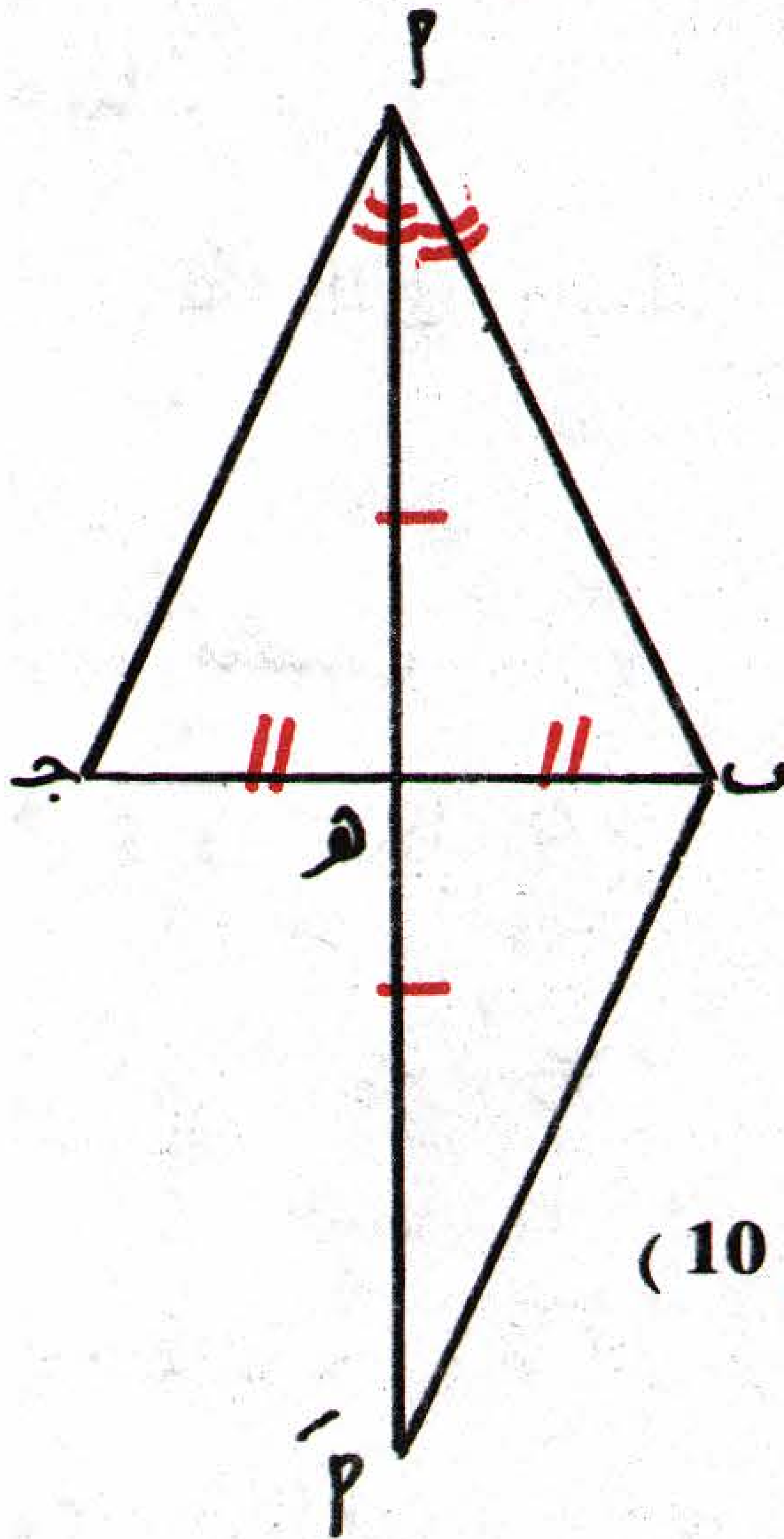
ا ب حـ مثلث متقايس الضلعين رأسه الأساسي ا . منصفا زاويتي قاعدته يتقاطعان في النقطة هـ .ـ بيّن أن المثلث هـ ب حـ متساوي الساقين.

مسألة 3 :

1) ا ب حـ مثلث حيث [ا هـ منصف [ا ب ، ا حـ] و (ا هـ) متوسط .

ـ لنبرهن على أن المثلث ا ب حـ متساوي الساقين رأسه الأساسي ا .

البرهان :



(الشكل 10)

ـ ننشىء ا' نظيرة ا بالنسبة إلى هـ .(الشكل 10)

النقطتان ب ، حـ متناظرتان بالنسبة إلى النقطة هـ .

وكذلك النقطتان ا ، ا' متناظرتان بالنسبة إلى هـ ،

هـ نظيرة هـ بالنسبة إلى هـ .

فالمثلثان ا هـ حـ ، ا' هـ ب متناظران بالنسبة إلى هـ . فهما متقايسان .

نستنتج أن $\widehat{هـ ا' ب} = \widehat{هـ ا حـ}$

ولدينا $\widehat{هـ ا حـ} = \widehat{هـ ا ب}$ ([ا هـ منصف [ا ب ، ا حـ]) .

إذن $\widehat{هـ ا' ب} = \widehat{هـ ا ب}$ وهذا يعني أن المثلث ا ب ا' متساوي الساقين

ومنه ب ا = ب ا' ولدينا هـ ا' = هـ ا

نستنتج أن (ب حـ) محور [ا ا'] .

فالمستقيم (ا هـ) عمودي على حامل [ب حـ] في منتصفها هـ ، أي أنه محور [ب حـ] .

فتكون النقطة ا متساوية المسافة عن طرفي [ب حـ] .

نستنتج أن المثلث ا ب حـ متساوي الساقين رأسه الأساسي ا .

نظرية :

إذا كان منصف إحدى زوايا مثلث متوسطا له فإن هذا المثلث متساوي الساقين .

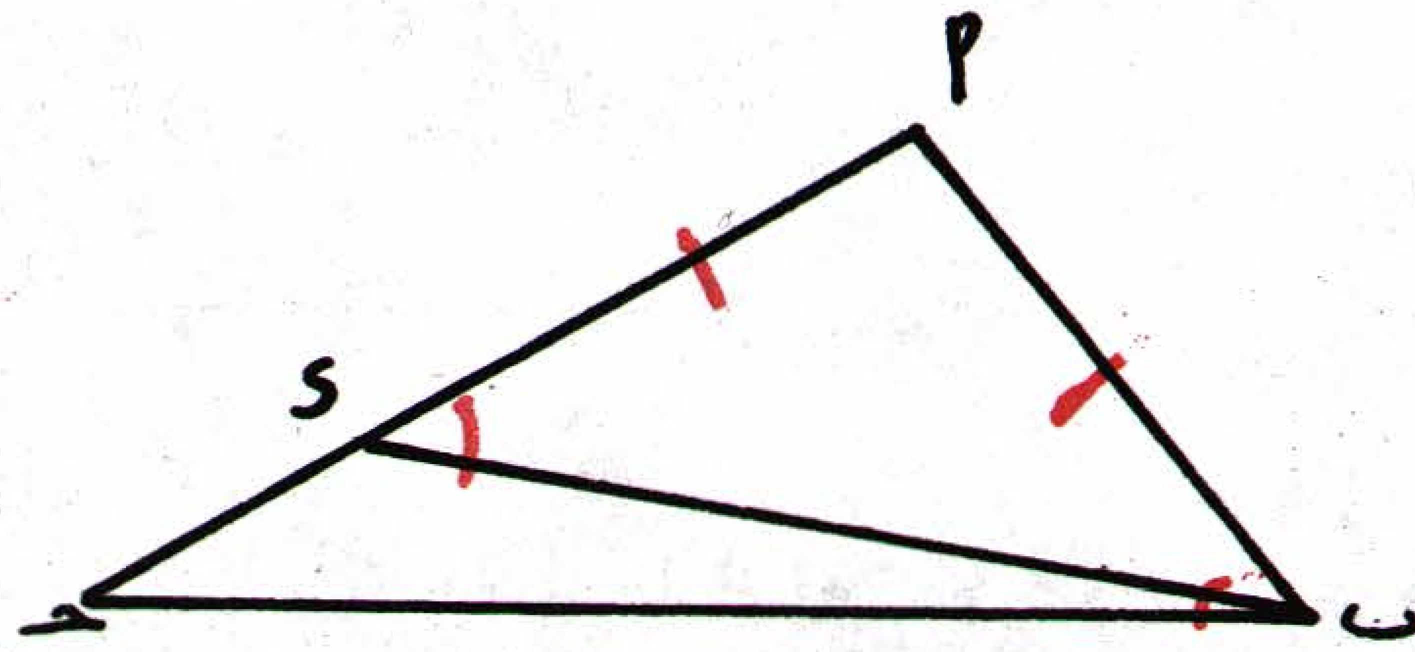
2) برهن على أنه :

إذا كان منصف إحدى زوايا مثلث عمودا له فإن هذا المثلث متساوي الساقين .

4. المتباينات في المثلث :

مسألة 1 :

ا ب ح مثلث حيث ا ح > ا ب . لنبرهن أن $\widehat{\text{ا ب ح}} > \widehat{\text{ا ح ب}}$.



(الشكل 11)

البرهان :

ـ نعين نقطة د من [ا ح] بحيث ا د = ا ب (الشكل 11)

إذن $\widehat{\text{ا د ب}} = \widehat{\text{ا ب د}}$.

بما أن $\widehat{\text{ا د ب}} = \widehat{\text{د ح ب}} + \widehat{\text{د ب ح}}$ (لأن [د ا ، د ب [زاوية خارجية بالنسبة إلى المثلث د ب ح) . فإن $\widehat{\text{ا د ب}} > \widehat{\text{د ح ب}}$.

لكن $\widehat{\text{ا د ب}} = \widehat{\text{ا ب د}}$ إذن $\widehat{\text{ا ب د}} > \widehat{\text{د ح ب}}$.

لاحظ أن : [ب د ، ب ا[⊂ [ب ح ، ب ا[إذن $\widehat{\text{ا ب ح}} > \widehat{\text{ا ب د}}$.

لدينا $\widehat{\text{ا ب ح}} > \widehat{\text{ا ب د}}$ و $\widehat{\text{ا ب د}} > \widehat{\text{د ح ب}}$

فنستنتج أن $\widehat{\text{ا ب ح}} > \widehat{\text{د ح ب}}$ أي $\widehat{\text{ا ب ح}} > \widehat{\text{ا ح ب}}$.

نظرية :

الضلع الأطول في مثلث يقابل الزاوية الأوسع .

مسألة 2 :

ا ب حـ مثلث حيث $\widehat{\text{ا ب حـ}} > \widehat{\text{ا حـ ب}}$ لنبرهن أن ا حـ > ا ب .

البرهان :

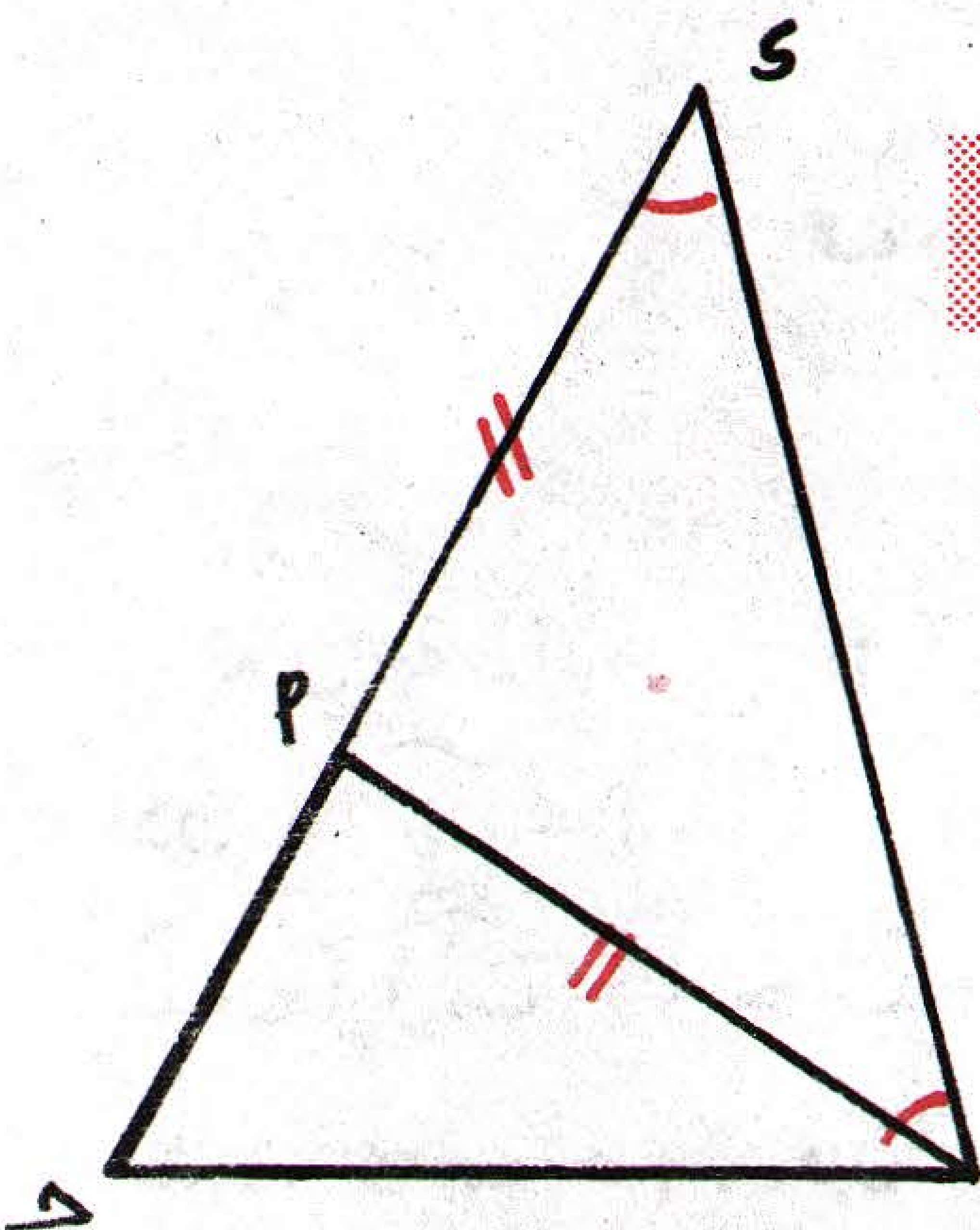
توجد ثلاث حالات ممكنة بالنسبة إلى الطولين ا حـ ، ا ب :

إما ا حـ = ا ب وإما ا حـ < ا ب وإما ا حـ > ا ب .

- إذا كان ا حـ = ا ب فإن $\widehat{\text{ا ب حـ}} = \widehat{\text{ا حـ ب}}$ وهذا يخالف الفرض .
- إذا كان ا حـ < ا ب فإن $\widehat{\text{ا ب حـ}} < \widehat{\text{ا حـ ب}}$ (حسب النظرية السابقة) وهذا أيضا يخالف الفرض .

إذن حتما الحالة الوحيدة الممكنة هي ا حـ > ا ب .

نظرية :



(الشكل 12)

الزاوية الأوسع في مثلث تقابل الضلع الأطول .

نتيجة :

الوتر في المثلث القائم هو أطول ضلع فيه .

مسألة 3 :

ا ب حـ مثلث . لنبرهن أن ب حـ < ا ب + ا حـ .

البرهان :

نعين نقطة ء من] حـ ا بحيث ا ء = ا ب . (الشكل 12)

فيكون $\widehat{\text{ء ب ا}} = \widehat{\text{ب ء ا}}$.

لاحظ أن [ب د ، ب ا] ⊂ [ب د ، ب ج] .

إذن د ب ا̂ < د ب ج̂ .

ومنه ب د ا̂ < د ب ج̂ .

في المثلث د ب ج لدينا ب د ج̂ < د ب ج̂ فيكون ب ج < د ج .

بما أن د ج = د ا + ا ج و د ا = ا ب .

فإن | ب ج < ا ب + ا ج | ..... (1)

• وبنفس الطريقة ، يمكنك أن تبرهن على أن :

| ا ج < ا ب + ب ج | (2) وأن | ا ب < ا ج + ب ج | (3)

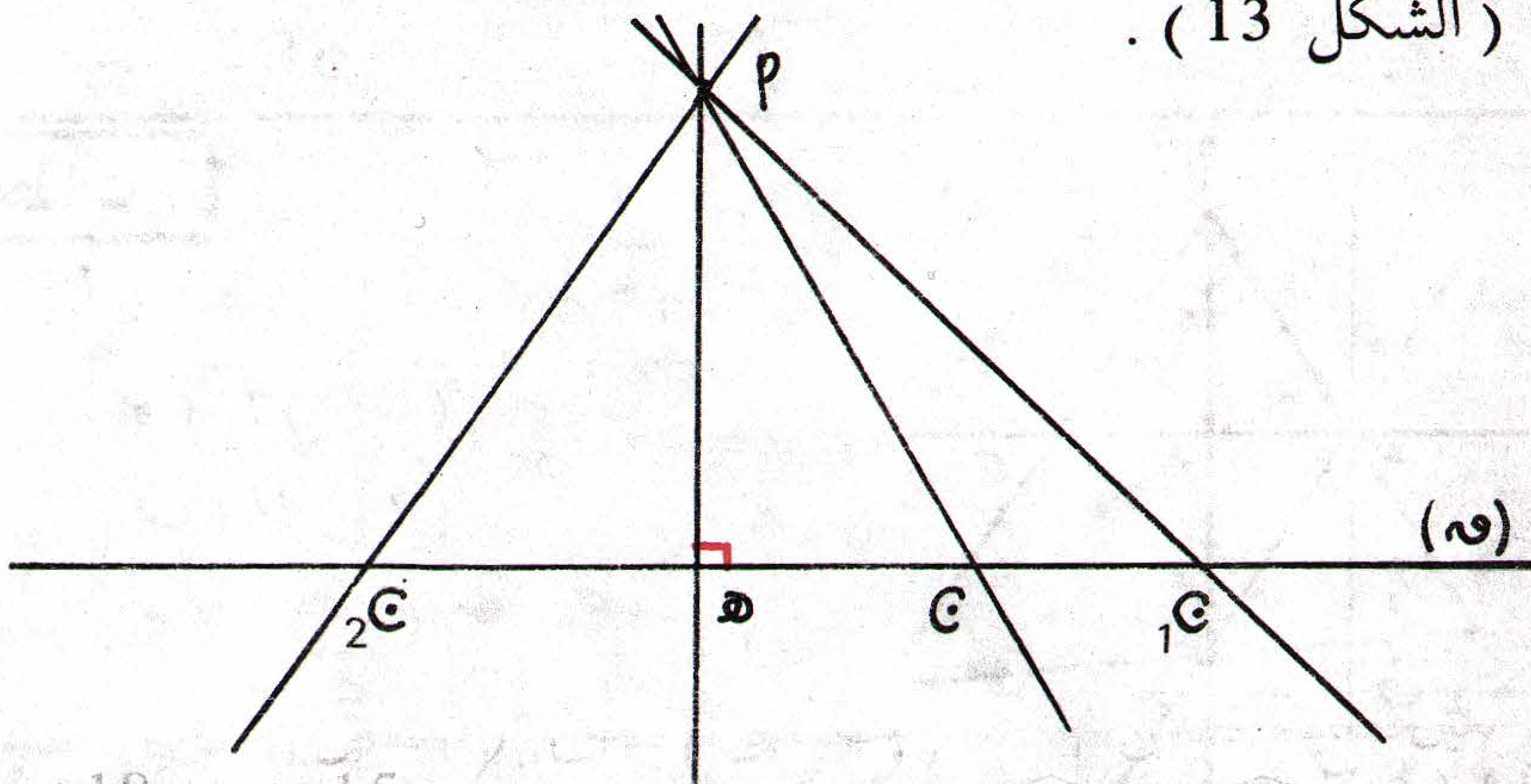
نظرية :

طول أي ضلع في مثلث هو أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين .

• كل من الكتابات (1) ، (2) ، (3) تسمى **متباينة مثلثية** .

تطبيق : العمود والموائل

(و) مستقيم ، ا نقطة لا تنتمي إليه ، هـ هي المسقط العمودي للنقطة ا على (و) . (الشكل 13) .



(الشكل 13)

- المستقيم (أ هـ) هو العمود على (ق) المرسوم من النقطة أ .
ق ، $ق_1$ ، $ق_2$ ،... نقاط من (ق) كل منها تختلف عن هـ .

- كل من المستقيمات (أ ق) ، (أ $ق_1$) ، (أ $ق_2$) .... يسمى **مائلا** بالنسبة إلى (ق) .
- كل من هـ ق ، هـ $ق_1$ ، هـ $ق_2$ ، ... يسمى **انفراج المائل** عن العمود (أ هـ) .

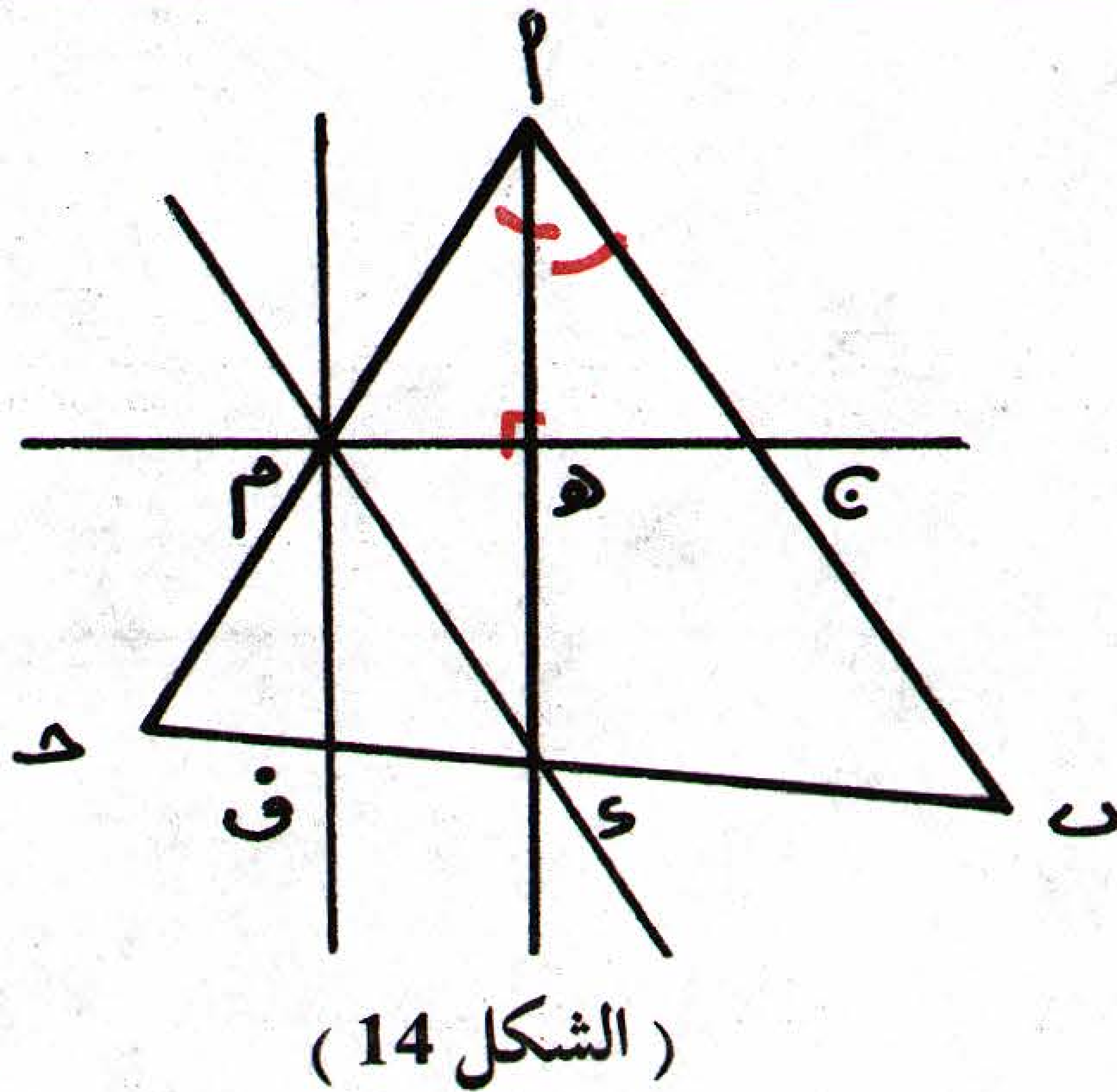
لاحظ أن كلاًّ من المثلثات أ هـ ق ، أ هـ $ق_1$ ، أ هـ $ق_2$ ، ... هو مثلث قائم في هـ فأطوال الأضلاع [هـ ق] ، [هـ $ق_1$] ، [هـ $ق_2$] ، ... ترتَّبُ حسب ترتيب أطوال الأوتار [أ ق] ، [أ $ق_1$] ، [أ $ق_2$] ، ...

مسألة محلولة

أ ب حـ مثلث ، منصف الزاوية [أ ب ، أ حـ] يقطع (ب حـ) في ء المستقيم الذي يشمل ء ويوازي (أ ب) يقطع (أ حـ) في م 1) برهن أن م أ ء مثلث متساوي الساقين . 2) المستقيم الذي يشمل م ويوازي (أ ء) يقطع (ب حـ) في ف . برهن أن [م ف منصف الزاوية [م ء ، م حـ] . 3) المستقيم الذي يشمل م ويعامد (أ ء) في النقطة هـ يقطع (أ ب) في ق . برهن أن أ ق = أ م .

المعطيات :

[أ ء منصف [أ ب ، أ حـ] .
(ء م) // (أ ب) .
(م ف) // (أ ء) .
(م ق) ⊥ (أ ء) .



(الشكل 14)

المطلوب إثبات أن :

1) المثلث م ا ى متساوي الساقين .

2) [م ف منصف [م ى ، م ح] .

3) ا ﻫ = ا م .

البرهان :

1) بما أن (ى م) // (ا ب) و (ا ى) قاطع لهما ؛
فالزاويتان [ى م ، ى ا] و [ا ى ، ا ب] المتبادلتان
داخليا متقايستان أي م ى ا = ى ا ب .
لكن ى ا ب = ى ا ح (لأن [ا ى منصف)
إذن م ى ا = ى ا م .
المثلث م ا ى له زاويتان متقايستان فهو متساوي الساقين .

2) بما أن (م ف) // (ا ى) و (ا ح) قاطع لهما ؛ فالزاويتان [م ح ، م ف] و
[ا ح ، ا ى] المتماثلتان متقايستان أي ح م ف = ح ا ى .
وأيضا (م ف) // (ا ى) و (م ى) قاطع لهما ؛ فالزاويتان [ى ا ، ى م] و
[م ى ، م ف] المتبادلتان داخليا متقايستان أي ا ى م = ى م ف .
ولكن ح ا ى = ا ى م (من السؤال الأول) .
ومنه ح م ف = ى م ف .
فالزاويتان المتجاورتان [م ف ، م ح] و [م ف ، م ى] متقايستان إذن [م ف
منصف [م ى ، م ح] .

3) المثلثان ا ﻫ ﻫ ، ا م ﻫ متقايسان لأن :

- ا ﻫ ﻫ = ا ﻫ م = 90° .
- [ا ﻫ] ضلع مشترك .
- ﻫ ا ﻫ = ﻫ ا م (لأن [ا ﻫ منصف) .

نستنتج من تقايس هذين المثلثين أن : ا ﻫ = ا م .

التَّمَــــارِيــنُ

1. ا ب حـ مثلث فيه $\widehat{ا ب حـ} = 70°$ ؛ $\widehat{ب ا حـ} = 58°$ ، منصف [ب ا ، ب حـ] يقطع [ا حـ] في ء ومنصف [حـ ا ، حـ ب] يقطع [ا ب] في هـ ،
(حـ هـ) ∩ (ب ء) = {ص} ، أحسب بالدرجات كلا من :
1) $\widehat{ا حـ ب}$ ، $\widehat{ا ء ب}$ ، $\widehat{ب ء حـ}$ ، $\widehat{ا هـ حـ}$ ، $\widehat{ب هـ حـ}$.
2) ثم أقياس الزوايا التي رؤوسها النقطة ص .

2. ا ب حـ مثلث فيه $\widehat{ب} = 60°$. $\widehat{حـ} = 40°$.
[ا هـ] ، [ا ء] هما العمود والمنصف المتعلقان بالضلع [ب حـ]
1) احسب قيس كل من [ا ب ، ا حـ] ؛ [ا هـ ، ا حـ] ؛ [ا هـ ، ا ء] ؛ [ا هـ ، ا ب]
2) بيّن أن ء ∋ [هـ حـ] .

3. ا ب حـ مثلث قائم في ا . احسب بالدرجات قيس كل من الزوايا :
1) [ص ب ، ص حـ] حيث ص هي نقطة تقاطع المنصفين الداخليين لزاويتي الرأسين ب ، حـ .
2) [ى ب ، ى حـ] حيث ى هي نقطة تقاطع المنصفين الخارجيين لزاويتي الرأسين ب ، حـ .
3) [ك ب ، ك حـ] حيث ك هي نقطة تقاطع المنصف الداخلي لزاوية الرأس ب والمنصف الخارجي لزاوية الرأس حـ .
4) [د ب ، د حـ] حيث د هي نقطة تقاطع المنصف الخارجي لزاوية الرأس ب والمنصف الداخلي لزاوية الرأس حـ .

4. ا ب حـ مثلث متساوي الساقين ، م منتصف القاعدة [ب حـ] . ء ، هـ نقطتان من (ب حـ) متناظرتان بالنسبة إلى م بحيث ب ء = حـ هـ .
بين أن المثلثين ا ب هـ ، ا حـ ء متقايسان وأن (ا م) هو محور [ء هـ] .

5. ا ب حـ مثلث متساوي الساقين قاعدته [ب حـ] .
1) برهن على أن المتوسطين [ب د] ، [حـ هـ] المتعلقين بالضلعين [ا حـ] ، [ا ب] متقايسان .

2) نضع [ب ن] ∩ [ح ه] = {ث}، ما نوع المثلث ث ب ح ؟

3) احسب قيس كل زاوية من المثلث ا ب ح علمًا بأن ب ا ح = 2 ا ب ح .

6. ا ب ح مثلث متساوي الساقين قاعدته [ب ح]،
[ب س]، [ح ع] منصفا الزاويتين [ب ح، ب ا] و [ح ا، ح ب] يقطعان [ا ح]، [ا ب] في النقطتين ب′، ح′ على الترتيب.

1) برهن على أن [ب ب′]، [ح ح′] متقايستان.

2) ما نوع المثلث م ب′ح′ حيث م هي نقطة تقاطع [ب ب′] و [ح ح′]؟

7. ا ب ح مثلث، المنصفان الداخليان للزاويتين ب، ح يتقاطعان في ن، المستقيم الذي يشمل ن ويوازي (ب ح) يقطع الضلعين [ا ب]، [ا ح] في النقطتين د، ه على الترتيب.

1) برهن أن كلا من المثلثين ب د ن، ح ه ن متقايس الساقين.

2) برهن أن محيط المثلث ا د ه يساوي ا ب + ا ح.

8. ا ب ح مثلث متساوي الساقين قاعدته [ب ح]. [ب د]، [ح ه] هما العمودان المتعلقان بالضلعين [ا ح]، [ا ب].

1) برهن أن ب د = ح ه.

2) برهن بالعكس أنه إذا كان [ب د]، [ح ه] متقايسين فإن ا ب = ا ح.

9. ا ب ح مثلث متساوي الساقين قاعدته [ب ح].
د، ه نقطتان من [ا ب]، [ا ح] بحيث ا د = ا ه.

1) برهن أن ح د = ب ه.

2) برهن أن [ح د]، [ب ه] متناظرتان بالنسبة إلى (و) محور [ب ح].

10. (س س′)، (ع ع′) مستقيمان متوازيان. (و) مستقيم يقطع (س س′) في ا كما يقطع (ع ع′) في ب بحيث يكون قيس إحدى الزوايا التي رأسها ا هو 72^{0}.

1) احسب بالدرجات قيس كل زاوية رأسها ا أو ب.

2) منصفا الزاويتين [ا س′، ا ب]، [ا ب، ا س] يقطعان (ع ع′) في م، ف على الترتيب.

• أثبت أن المثلثين ا ب م. ا ب ف متساويا الساقين.

• ما نوع المثلث ا م ف ؟
• استنتج أن ب هي منتصف [م ف] . ماذا يمثل [ا ب] في المثلث ا ف م ؟
3) المستقيمان العموديان على (ا م) ، (ا ف) واللذان يشملان النقطة ب يقطعان (س س′) في ل و ن على الترتيب .
أثبت أن (ب ل) // (ا ف) و (ب ن) // (ا م) .

11. ا ب ح مثلث متساوي الساقين قاعدته [ب ح] . ى ، ه هما منتصفا [ا ب] ، [ا ح] على الترتيب .
1) ما نوع المثلث ا ى ه ؟
2) المتوسط (ا ن) المتعلق بالقاعدة [ب ح] يقطع [ى ه] في ن′ . برهن أن ن′ منتصف القطعة [ى ه] وأن (ى ه) // (ب ح) .
3) (ق) مستقيم يشمل ب ويعامد (ى ه) في ل .
(ك) مستقيم يشمل ح ويعامد (ى ه) في ى .
برهن أن : ل ى = ى ه . ثم استنتج أن ن′ منتصف [ل ى] .

12. ا ب ح مثلث ، ى هي نظيرة ا بالنسبة إلى (ب ح) .
1) ما نوع المثلث ا ب ى ؟
2) (ا ن) متوسط متعلق بالضلع [ب ح] ، ك هي نظيرة ا بالنسبة إلى ن
برهن أن : $\widehat{\text{ى ب ح}} = \widehat{\text{ب ح ك}}$.
3) نضع (ب ى) ∩ (ح ك) = { ه } .
ما نوع المثلث ه ب ح ؟ وما هو محور [ب ح] ؟
استنتج أن : (ا ى) // (ه ن) .

13. [م س ، م ع] زاوية منصفها [م ص ؛ ا ، ب نقطتان من [م س و [م ع بحيث م ا ≠ م ب ،(ق) محور [ا ب] يقطع [م ص في النقطة ن
ح ، ى هما المسقطان العموديان للنقطة ن على [م س ، [م ع .
1) برهن أن ا ح = ب ى
2) قارن بين ن ب ، ن ح .

14. [م س ، م ع] زاوية ناتئة ؛ ا ، ب نقطتان من [م س ؛ ح ، ى نقطتان من[م ع

بحيث م ا = م حـ ، م ب = م ء ؛
نضع [ا ء] ∩ [ب حـ] = { هـ } .
1) برهن أن ا ء = ب حـ .
2) برهن أن [م هـ هو منصف الزاوية [م س ، م ع] .
3) برهن أن المستقيم (م هـ) هو محور كل من القطعتين [ا حـ] ، [ب ء] ثم استنتج أن (ا حـ) // (ب ء) .

15. ا ب حـ مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي ا .
هـ ، ء نقطتان بحيث هـ ∈ [ب ا ، هـ ∉ [ا ب] ،
ء ∈ [حـ ا ، ء ∉ [ا حـ] ، ا ء = ا هـ ، ا ء > ا حـ ، ا هـ > ا ب ،
(ب ء) ∩ (حـ هـ) = { م }
1) برهن أن ب ء = حـ هـ ، م ء = م هـ . ما نوع المثلث م ب حـ ؟
2) برهن أن [م ا منصف لكل من الزاويتين [م ب ، م حـ] و [ا ب ، ا حـ] .

16. ا ب حـ مثلث فيه ا ب > ا حـ ؛ منصف [ا ب ، ا حـ] يقطع محور [ب حـ] في ط .
(ط م) و (ط ن) عموديان على حامل [ا ب] ، [ا حـ] على الترتيب .
1) برهن أن ا م = ا ن وأن م ب = ن حـ .
2) قارن بين كل من ا م ، ا ب و ا ن ، ا حـ .
ثم استنتج أن ا م = $\frac{1}{2}$ (ا ب + ا حـ) .

17. ا ب حـ مثلث حيث $\widehat{ب} = 70^0$. $\widehat{حـ} = 60^0$ ؛
[ب س ⊥ (ا حـ) ، [حـ ص ⊥ (ا ب) ، [حـ ص ∩ [ب س = { ع }
برهن أن ع حـ > ع ب .

18. ا ب حـ مثلث فيه ا ب > ا حـ ، هـ منتصف [ا ب] .
(ق) مستقيم يشمل هـ ويوازي (ا حـ) ، (ق) ∩ (ب حـ) = { ء } .
برهن أن ء ب > ء هـ .

19. ا ب حـ مثلث فيه ا ب > ا حـ ، (ق) مستقيم يشمل ا ويوازي (ب حـ) ، منصفا

الزاويتين [ب ا ، ب ح] ، [ح ا ، ح ب] يقطعان (ﻫ) في ء ، ه على الترتيب و
[ب ء] ∩ [ح ه] = { م } .
برهن على أن م ب > م ح وأن م ء > م ه ، استنتج أن ب ء > ح ه .

20. ا ب ح مثلث ، منصف [ا ب ، ا ح] يقطع [ب ح] في ء .
بيّن أن ء ب < ا ب وأن ء ح < ا ح .

21. ه نقطة داخل المثلث ب ح ء حيث (ح ه) ∩ (ب ء) = { ﻫ } .
1) قارن بين العددين (ه ح + ه ء) و (ﻫ ح + ﻫ ء) ثم قارن بين العددين (ﻫ ح + ﻫ ء) و (ب ح + ب ء) .
2) استنتج ترتيبا بين العددين (ه ح + ه ء) و (ب ح + ب ء) .
3) إذا كان محيط المثلث ب ح ء يساوي 2 ك فرتب العددين ك و (ه ب + ه ح + ه ء) .

22. ب ح ء مثلث قائم في ح ، ه نقطة تقاطع (ح ء) ومنصف الزاوية [ب ء ، ب ح] ؛ ﻫ هو المسقط العمودي للنقطة ه على (ب ء) .
قارن بين كل من ه ح ، ه ﻫ ثم بين ه ﻫ ، ه ء ثم بين ه ح ، ه ء .

---

7 المجموع الجبري ـ الجداءات الشهيرة في ص

1. المجموع الجبري :

1) تعريف :

• الكتابة $(-7)+(-5)+(+8)+(-3)+(+5)$ تمثل سلسلة عمليات جمع فتسمى **مجموعًا جبريًا** .

• الكتابة $(+6)-(-16)+(+5)-(+9)$ تمثل سلسلة عمليات جمع وطرح ويمكن كتابتها على شكل سلسلة عمليات جمع فقط كما يلي :
$(+6)+(+16)+(+5)+(-9)$.
فتسمى أيضا مجموعًا جبريًا .

بصفة عامة :

أ ، ب ، حـ ، ى ، هـ أعداد صحيحة كل من الكتابات :
أ + ب + حـ ؛ أ − ب − هـ ؛ أ − ب − حـ + هـ − ى ؛ 3 أ − 2 ب + 5 حـ
تعبّر عن سلسلة عمليات جمع أو طرح في ص وتسمى **مجموعًا جبريًا** .

• كل عدد في مجموع جبري يسمى **حدًا** من هذا المجموع .

2) حساب مجموع جبري :

مثال : لنحسب المجموع الجبري م حيث :
م $=(+7)-(-5)-(-8)+(-3)+(-5)$.
يمكننا أن نحسب المجموع م بعدة طرق منها :
1) م $=(+7)-(-5)-(-8)+(-3)+(-5)$.
نكتب م $=(+7)+(+5)+(+8)+(-3)+(-5)$.
بما أن عملية الجمع في ص تبديلية وتجميعية ، فيمكننا إيجاد مجموع الأعداد الموجبة ومجموع الأعداد السالبة .

أي : م = [(+ 7) + (+ 5) + (+ 8)] + [(− 3) + (− 5)] .

م = (+ 20) + (− 8) .

م = (+ 12)

2) نلاحظ في المجموع م أن العددين (+ 5) و (− 5) متعاكسان فمجموعهما صفر .

نكتب م = [(+ 7) + (+ 8) + (− 3)] + [(+ 5) + (− 5)]

م = [(+ 15) + (− 3)] + 0

م = (+ 12)

2. معاكس مجموع جبري :

1) مسألة : ل = أ + ب − جـ − هـ مجموع جبري .

لنبرهن أن المجموع الجبري م = − أ − ب + جـ + هـ هو معاكس المجموع الجبري ل .

البرهان :

لكي نبرهن أن م هو معاكس ل يكفي أن نبرهن أن ل + م = 0 .

لنحسب ل + م .

ل + م = (أ + ب − جـ − هـ) + (− أ − ب + جـ + هـ)

ل + م = [أ + ب + (− جـ) + (− هـ)] + [(− أ) + (− ب) + جـ + هـ]

وبما أن الجمع في ص تبديلي وتجميعي فإن :

ل + م = [أ + (− أ)] + [ب + (− ب)] + [(− جـ) + جـ] + [(− هـ) + هـ] .

وبما أن مجموع العددين المتعاكسين يساوي الصفر فإن :

ل + م = 0 وهذا يعني أن م هو معاكس ل .

أي : − م = ل

أو − (− أ − ب + جـ + هـ) = أ + ب − جـ − هـ .

2) نتائج :

1) أ ، ب عددان صحيحان

$-(\text{أ}+\text{ب}) = -\text{أ}-\text{ب}$

$-(\text{أ}-\text{ب}) = -\text{أ}+\text{ب}$

مثال 1 : $-[(-2)+(-5)] = -(-2)-(-5)$.

$-[(-2)+(-5)] = (+2)+(+5)$.

مثال 2 : $-[(-4)+(+7)] = -(-4)-(+7)$

$-[(-4)+(+7)] = (+4)+(-7)$.

مثال 3 : $-[(-8)-(-6)] = -(-8)+(-6)$

$-[(-8)-(-6)] = (+8)+(-6)$.

مثال 4 : $-[(-6)-(+9)] = -(-6)+(+9)$.

$-[(-6)-(+9)] = (+6)+(+9)$.

2) أ ، ب ، ج أعداد صحيحة :

$\text{أ}-(\text{ب}+\text{ج}) = \text{أ}-\text{ب}-\text{ج}$

$\text{أ}-(\text{ب}-\text{ج}) = \text{أ}-\text{ب}+\text{ج}$

3) أ ، ب ، ج ، د ، هـ أعداد صحيحة :

$\text{أ}-(-\text{ب}+\text{ج}+\text{د}-\text{هـ}) = \text{أ}+\text{ب}-\text{ج}-\text{د}+\text{هـ}$

أحسب كلاًّ ممّا يلي بطريقتين :

$(+7)-[(-5)+(+8)]$ ؛ $(-9)-[(+5)+(+3)]$.

$(-1)-[(-2)-(-10)]$ ؛

$(+10)-[(-5)+(+7)-(-2)-(+9)]$.

3. الكتابة المبسطة لمجموع جبري :

1) اصطلاح :

لتبسيط كتابة مجموع جبري نراعي ما يلي :

- نكتب المجموع الجبري على شكل سلسلة عمليات جمع فقط .
- نحذف قوسي العدد والإشارة + التي تدل على عمليات الجمع .

مثلا : $\text{ل} = (+3) - (+5) - (-6) + (-10) + (+7)$.

- $\text{ل} = (+3) + (-5) + (+6) + (-10) + (+7)$.
- $\text{ل} = +3 - 5 + 6 - 10 + 7$.

ملاحظة :

إذا كانت إشارة الحد الأول في مجموع جبري هي الإشارة + فيمكن حذفها .

نكتب $\text{ل} = 3 - 5 + 6 - 10 + 7$.

> اكتب على الشكل المبسط كلا من المجاميع الجبرية الآتية :
>
> $(-5) - (-7) + (-9) - (-8) - (-2)$ ؛
>
> $(-2) + [(-3) - (-4)]$ ؛ $(-3) - [(+4) + (-7)]$ ؛
>
> $(-9) - [(-7) - (-5)]$ ؛
>
> $(-8) - [(-1) + (-3) - (-5) - (+4)]$.

2) حساب مجموع جبري مكتوب على الشكل المبسط :

لنحسب المجموع الجبري م حيث :

$\text{م} = 3 - 5 + 6 - 10 + 7$

نعلم أن :

$\text{م} = 3 - 5 + 6 - 10 + 7 = (+3) + (-5) + (+6) + (-10) + (+$

نحسب مجموع الأعداد الموجبة ومجوع الأعداد السالبة

فيكون :

$3 - 5 + 6 - 10 + 7 = [(+3) + (+6) + (+7)] + [(-5) + (-10)]$.

ومنه $3 - 5 + 6 - 10 + 7 = (3 + 6 + 7) + (-5 - 10)$.

$3 - 5 + 6 - 10 + 7 = 16 - 15$

$3 - 5 + 6 - 10 + 7 = 1$.

3) قاعدة حذف أو وضع الأقواس :

مثال 1 : لنقارن بين المجموعين الجبريين م ، ل حيث :

م $= 11 - (-9 + 7 - 10)$ ، ل $= 11 + 9 - 7 + 10$.

نعلم أن $-(-9 + 7 - 10) = 9 - 7 + 10$.

ومنه $11 - (-9 + 7 - 10) = 11 + 9 - 7 + 10$.

أي م = ل .

• لاحظ ما يلي :

إذا كانت القوسان مسبوقتين بالإشارة – فإننا :

1) نحذف كلا من القوسين والإشارة – التي تسبقها .

2) نغيّر إشارات ما بين هاتين القوسين .

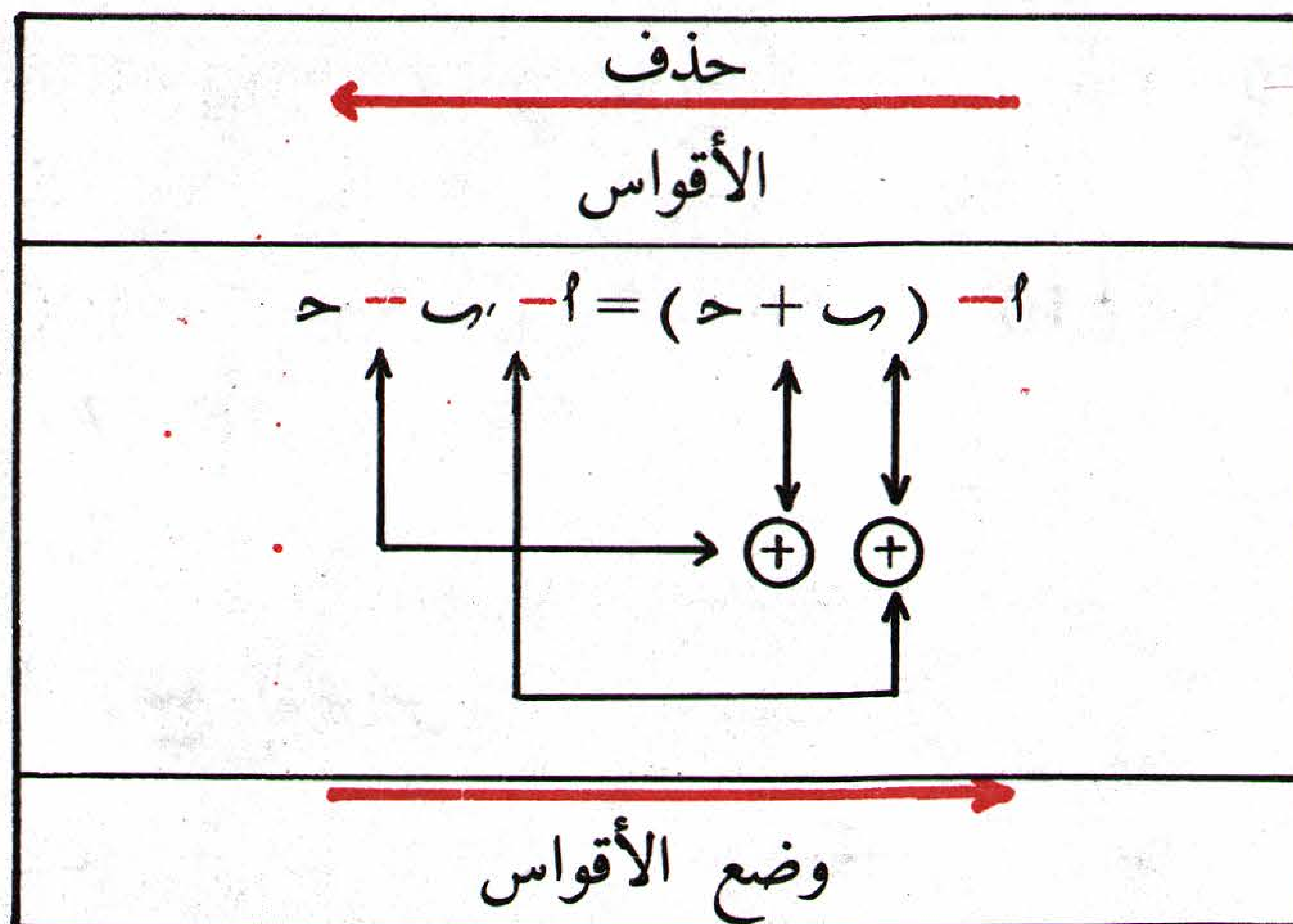
• لاحظ أيضا أن : $11 + 9 - 7 + 10 = 11 - (-9 + 7 - 10)$

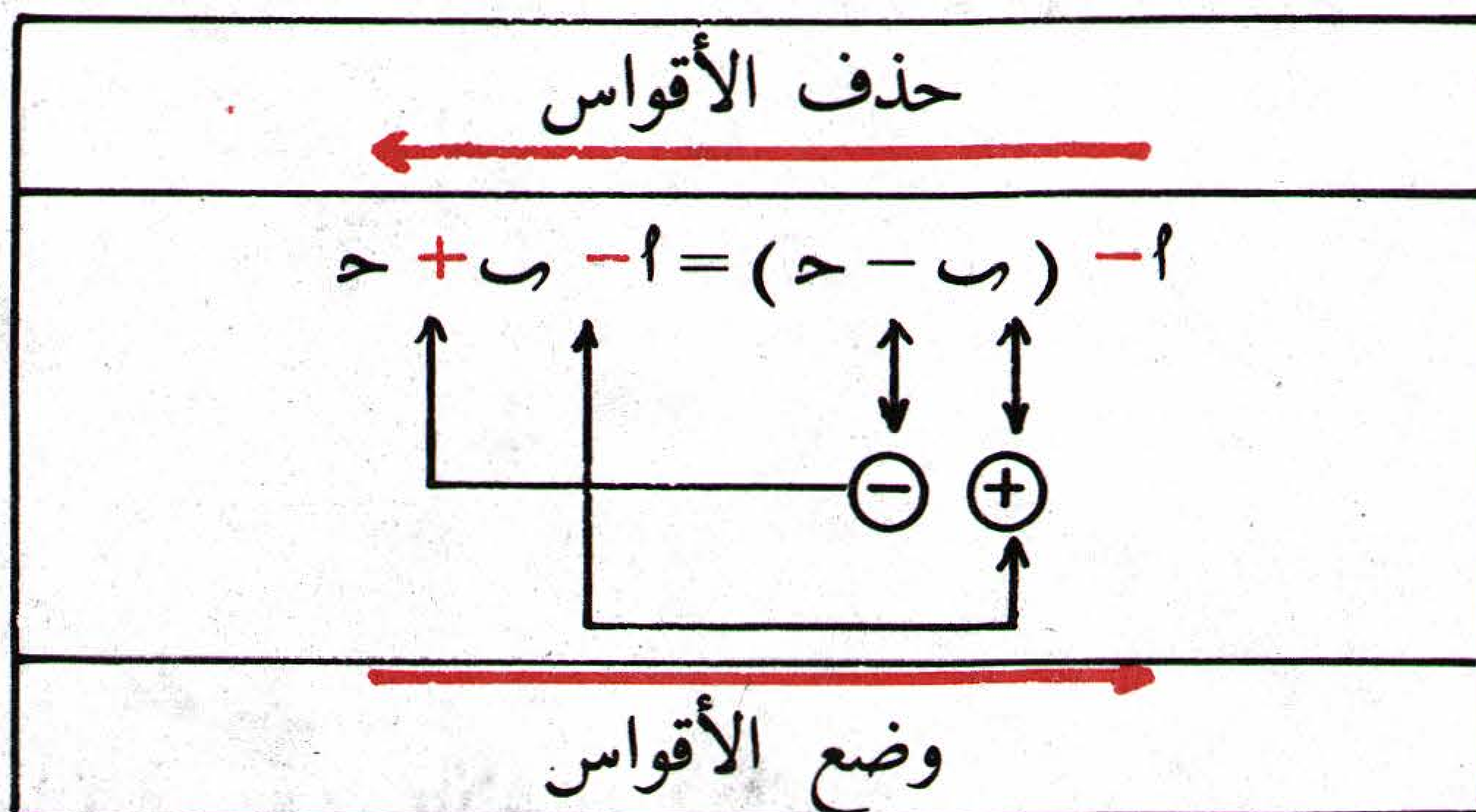
بصفة عامة :

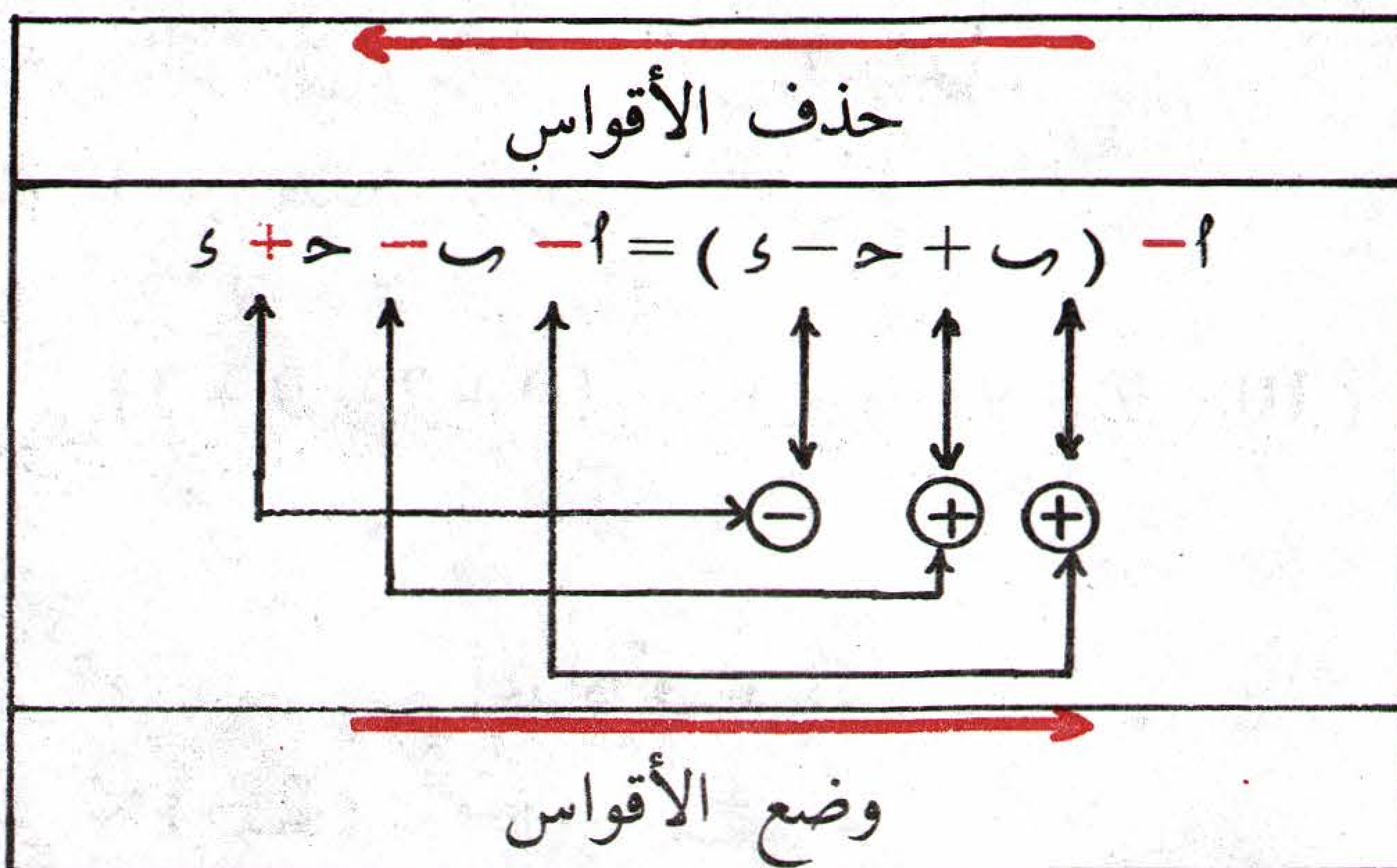
أ ، ب ، جـ أعداد صحيحة :

أ ب جـ = أ − ب جـ

• انتبه إلى كيفية **حذف** أو **وضع** الأقواس المسبوقة بالإشارة − أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة .







مثال 2 : لنقارن بين المجموعين الجبريين :

$(12 - 5) + 18$ و $12 - (5 + 18)$

لدينا : $(12 - 5) + 18 = 7 + 18 = 25$

و $12 - (5 + 18) = 12 - 23 = (-11)$

إذن $(12 - 5) + 18 \neq 12 - (5 + 18)$.

بصفة عامة :

أ ، ب ، ح أعداد صحيحة .

$(\text{أ} - \text{ب}) + \text{ح} \neq \text{أ} - (\text{ب} + \text{ح})$

4. جداء مجموعين جبريين :

مثال 1 : س ، ع ، ص أعداد صحيحة .

لنحسب الجداء $+3\text{س}\,(4\text{ع} + 5\text{ص} - 2)$

$3\text{س}\,(4\text{ع} + 5\text{ص} - 2) = (+3\text{س})\,[4\text{ع} + 5\text{ص} + (-2)]$

وبما أن الضرب توزيعي على الجمع في ص

فإن $(+3\text{س})\,[4\text{ع} + 5\text{ص} + (-2)] = [(+3\text{س}) \times (+4\text{ع})]$

$+ [(+3\text{س}) \times (5\text{ص})] + [(+3\text{س}) \times (-2)]$.

$(+3\text{س})[4\text{ع} + 5\text{ص} + (-2)] = (+12\text{سع}) + (15\text{سص}) + (-6\text{س})$

أي $(+3\text{س})\,(4\text{ع} + 5\text{ص} - 2) = 12\text{سع} + 15\text{سص} - 6\text{س}$

نقول إننا نشرنا الجداء $(+3\text{س})\,(4\text{ع} + 5\text{ص} - 2)$

لاحظ في المجموع الجبري $12\text{سع} + 15\text{سص} - 6\text{س}$ أنّ :

$12\text{سع} = 3\text{س} \times 4\text{ع}$

$15\text{سص} = 3\text{س} \times 5\text{ص}$

$-6\text{س} = 3\text{س} \times (-2)$

ومنه 12 س ع + 15 س ص − 6 س = 3 س × 4 ع + 3 س × 5 ص + 3 س × (− 2)

12 س ع + 15 س ص − 6 س = 3 س × (4 ع + 5 ص − 2) .

نقول إننا كتبنا المجموع الجبري 12 س ع + 15 س ص − 6 س على **شكل جداء عاملين** هما (+ 3 س) و (4 ع + 5 ص − 2) حيث (+ 3 س) **عامل مشترك** لكل من حدود المجموع الجبري .

نقول أيضا أننا **حللنا** هذا المجموع إلى جُداء عاملين .

مثال 2 : • لنحسب الجداء (3 س − 2 ع) (5 ص + 6)

لحساب هذا الجداء نضع 5 ص + 6 = م فيكون :

(3 س − 2 ع) (5 ص + 6) = (3 س − 2 ع) . م

(3 س − 2 ع) (5 ص + 6) = 3 س . م − 2 ع . م

(3 س − 2 ع) (5 ص + 6) = 3 س (5 ص + 6) − 2 ع (5 ص + 6)

(3 س − 2 ع) (5 ص + 6) = (15 س ص + 18 س) − (10 ع ص + 12 ع)

(3 س − 2 ع) (5 ص + 6) = 15 س ص + 18 س − 10 ع ص − 12 ع

نقول إننا **نشرنا** الجداء (3 س − 2 ع) (5 ص + 6) .

• لاحظ في المجموع الجبري 15 س ص + 18 س − 10 ع ص − 12 ع .

3 س هو عامل مشترك لحدي المجموع 15 س ص + 18 س .

وأن 2 ع هو عامل مشترك لحدي المجموع − 10 ع ص − 12 ع .

يمكن كتابة المجموع المعطى كما يلي :

15 س ص + 18 س − 10 ع ص − 12 ع = (15 س ص + 18 س)

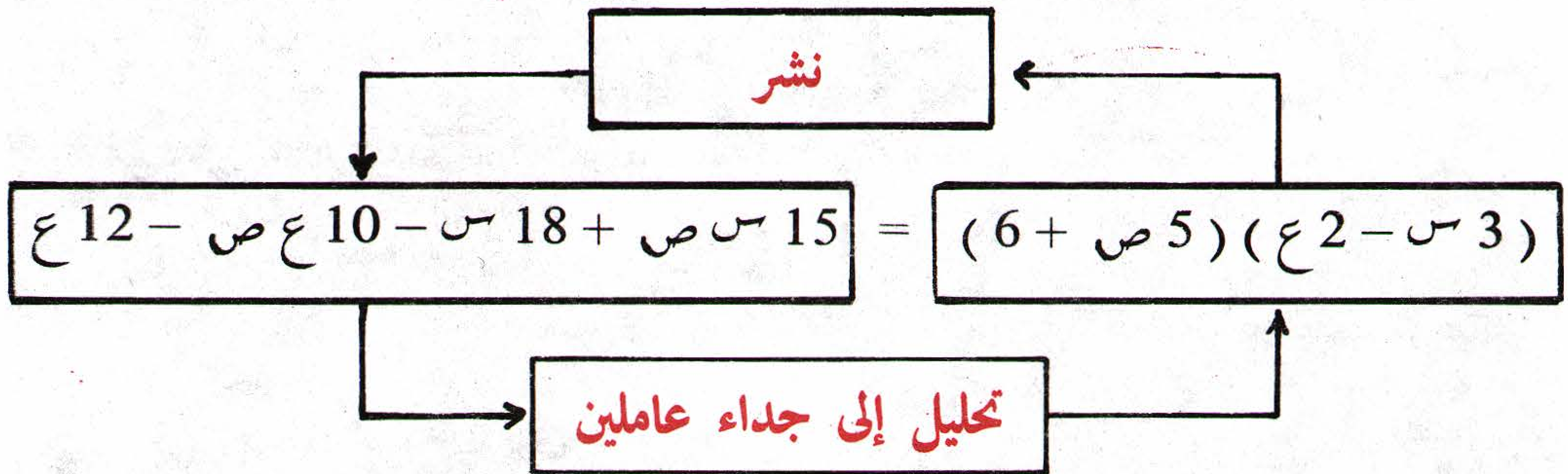
− (10 ع ص + 12 ع) . = (3 س . 5 ص + 3 س . 6) − (2 ع . 5 ص + 2 ع . 6)

15 س ص + 18 س − 10 ع ص − 12 ع = 3 س (5 ص + 6) − 2 ع (5 ص + 6)

لاحظ أيضا أن (5 ص + 6) هو عامل مشترك لحدي هذا المجموع الجبري .

15 س + 18 س − 10 ع ص − 12 ع = (5 ص + 6) (3 س − 2 ع)

نقول إننا حللنا المجموع الجبري إلى جداء عاملين .



5. الجداءات الشهيرة :

1) مربع مجموع :

- أ ، ب عددان صحيحان ، لنحسب $(أ + ب)^2$:

لدينا : $(أ + ب)^2 = (أ + ب) . (أ + ب)$

$= أ(أ + ب) + ب(أ + ب)$

$= أ^2 + أب + ب أ + ب^2$

$= أ^2 + أب + أب + ب^2$

أي $(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2$

مهما يكن العددان الصحيحان أ ، ب فإن :
$(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2$

2) مربع فرق :

- أ، ب عددان صحيحان ، لنحسب $(أ - ب)^2$:

لدينا : $(أ - ب)^2 = (أ - ب) . (أ - ب)$

$= أ . (أ - ب) - ب . (أ - ب)$

$= أ^2 - أب - ب أ + ب^2$

أي $(أ - ب)^2 = أ^2 - 2أب + ب^2$

مهما يكن العددان الصحيحان أ ، ب فإن :
$(أ - ب)^2 = أ^2 - 2أب + ب^2$

3) جداء مجموع وفرق :

• أ ، ب عددان صحيحان ، لننشر الجداء $(أ + ب) . (أ - ب)$

لنشر هذا الجداء نضع $أ + ب = م$

فيكون $(أ + ب)(أ - ب) = م . (أ - ب)$

أي : $(أ + ب)(أ - ب) = م . أ - م ب$

$= (أ + ب) . أ - (أ + ب) . ب$

$= أ^2 + ب أ - أ ب - ب^2$

أي : $(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2$ لأن $ب أ - أ ب = 0$

مهما يكن العددان الصحيحان أ ، ب فإن
$(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2$

أ ، ب ، س ، ع أعداد صحيحة ، احسب كلاًّ من :
$(2أ + ب)^2$ ؛ $(س^2 - 3ع)^2$ ؛ $(2س - 5ع)(2س + 5ع)$ ؛
$(3أ^2 - 2ب)(3أ^2 + 2ب)$ ؛ $(4س - 3)^2$ ؛ $(5أ + 3ب)^2$

تطبيقات :

1) لحساب المجموع ل = $3 \times 14 - 7 - (2-) \times 18 - 39$

نحسب أولا الجداءين $18 \times (-2)$ و 3×14

فيكون ل = $42 - 7 - (36-) - 39$

أي : ل = $42 - 7 - 36 + 39$

ل = $(42 + 7) - (36 + 39)$

ل = $49 - 75$

ل = 26

لاحظ أن :

$$3 \times 14 - 7 - (2-) \times (18 - 39) \neq 3 \times 14 - 7 - (2-) \times 18 - 39$$

ملاحظة هامة :

إذا كان أحد حدود مجموع جبري على شكل جداء ، فلحساب هذا المجموع نعطي الأولوية لحساب الجداء .

1) احسب المجموع : $7 + (5-) \times 18 + 9 - 15 \times (3-)$.
2) احسب المجموع : $35 - {}^2(2) \times 3 + 25$
3) احسب المجموع : $19 - {}^2(5 - 7) \times 4 + 37$.

2) لحساب المجموع الجبري $[(9 - 17-) - (2 + 10) - 3] - 7$

نحسب أولا ما بين القوسين ، ثم نحسب ما بين العارضتين فيكون :

$(26 + 12 - 3) - 7 = [(26-) - 12 - 3] - 7$

$(12 - 29) - 7 =$

$17 - 7 =$

أي : $7 - [3 - (10 + 2) - (-17 - 9)] = -10$

3) لنحسب المجموع الجبري ل حيث :

ل $= (-18) + [-12\,(13 - 5) + 7 \times (-3) + 20]$

ل $= (-18) + (-96 - 21 + 20)$

ل $= (-18) + (-96 - 21 + 20)$

ل $= (-18) + (-97)$

ل $= -115$

4) لنحسب المجموع الجبري م حيث :

م $= -3 \times 17 + [-5 - 2 \times (-3)^2 - 4\,(-7 + 11)]$

م $= -51 + [-5 - 2 \times (+9) - 4 \times (+4)]$

م $= -51 + (-5 - 18 - 16)$

م $= -51 + (-39)$

م $= -90$

التَّمَـــارِيـــنُ

1. احسب كل مجموع جبري مما يلي :

1) (−25) + (−13) − (−18) + (+36) .

2) (+38) − (+13) + (−15) − (−29) .

3) (+37) + (−54) − (+28) − (−49) .

2. احسب كل مجموع جبري مما يلي بطريقتين :

1) (−5 + 8 − 4 + 12) − (3 − 15) + (2 + 11 − 9 − 1) .

2) (+9 − 13 + 4 + 7) + (−20 + 8) − (2 − 7 + 3 − 11) .

3) 15 − [−6 + 8 − (3 + 5 − 20) + (3 − 19)] .

3. س عدد صحيح .

اكتب على أبسط شكل ممكن كلاً من المجاميع الجبرية الآتية :

1) 18 + [11 − س − (−16 − س)] − [س − (12 + س)] .

2) −12 − [28 − (س − 8)] − س + 14 .

3) −س + 14 − [18 − س − 27] − (س − 11) + 31 .

4. س ، ع ، ص أعداد صحيحة ، أكمل كلاً مما يلي :

1) ص − 12 + س − 7 + ع = ص − 12 + (......) .

2) س + ع − 12 + ص = س + ع − (......) .

3) س − 15 − ع + ص = س − (......) .

4) ص + 4ع − س = ص + (......) .

5) ع − 18 + س + ص = ع − (......) .

6) ع − 4 + ص − س = ع − 4 − (......) .

5. س ، ع ، ص أعداد صحيحة ، صحّح الخطأ الموجود في كل ممّا يلي :

1) س − ع + 12 − ص = س − (ع + 12) − ص .

2) ع − (11 − س) + ص = ع − 11 − (س + ص)

3) 18 − (ص + 28) − (ع − س) = (18 − ص) + 28 − ع − س .

6. ا ، ب ، حـ أعداد صحيحة :

احسب المجاميع الجبرية الآتية :

1) ا − (ب − ا) ؛ (2ا + حـ) − (ا + ب) .

2) (3حـ − 2ب − ا) + (2ا − 2ب + حـ) ؛ (ب − حـ + 2ا) − (ا + ب − حـ) .

3) (3ا − 2ب + حـ) − (2ا + ب + 2حـ) ؛ (ا − ب + حـ) + (ب − 2حـ + ا) .

7. احسب بطريقتين ما يلي :

1) $(-2)(-5+12-7)$ ؛ $(9-15+11)(+7)$.

2) $(+8)(-6+4-12)$ ؛ $(-13-5-1)(-9)$.

3) $(-2+5)(-11+7-6)$ ؛ $(-7-3)(-21-7+10)$.

8. إذا كان ا = (+5) ، ب = (−3) ، حـ = (+4) . د = (−2) فتحقق أنّ :

1) (ا + ب) (حـ + د) = احـ + اد + ب حـ + ب د .

2) (ا − ب) (حـ + د) = احـ + اد − ب حـ − ب د .

3) (ا + ب) (حـ − د) = احـ − اد + ب حـ − ب د .

4) (ا − ب) (حـ − د) = احـ − اد − ب حـ + ب د .

9. س ، ع ، ص ، ل أعداد صحيحة ، بين أن :

1) (س + ع) (ص + ل) = س ص + س ل + ع ص + ع ل .

2) (س + ع) (ص − ل) = س ص − س ل + ع ص − ع ل .

3) (س − ع) (ص − ل) = س ص − س ل − ع ص + ع ل .

10. س ، ع ، ص أعداد صحيحة ، انشر ثم اكتب على أبسط شكل ممكن كلاً من المجاميع الجبرية الآتية :

1) 3 (4س − 2) + 7 (−3س − 14) .

2) −7 (3س − 24) − 2 (7 − 9س) + 4 (2س − 1) .

3) −5 (3س + 4ع) − (4س − 3ع) × (−7) + 2 (2ع − س + 3ص) .

11. أ ، ب عددان صحيحان ، انشر الجداءات الآتية :

1) $(-3+7\text{أ})(4-12\text{ب})$ ، $(15\text{أ}-18)(4\text{ب}-11)$.

2) $(-3\text{ب}+4)(8-5\text{أ})$ ، $(3\text{أ}+4\text{ب})(2\text{أ}+3\text{ب})$.

3) $(2\text{أ}-5\text{ب})(2\text{أ}+5\text{ب})$ ، $(5\text{أ}-3\text{ب})(5\text{أ}-3\text{ب})$.

12. انشر كلاً مما يلي حيث س ، ع عددان صحيحان .

1) $(2\text{س}+3\text{ع})^2$ ، $(4\text{س}-3\text{ع})^2$ ، $(5\text{س}-2\text{ع})(5\text{س}+2\text{ع})$.

2) $(3\text{س}-1)^2$ ، $(3\text{س}+4)^2$ ، $(4\text{ع}-3)(4\text{ع}+3)$.

13. حلّل كلاً من المجاميع الجبرية الآتية إلى جداء عاملين :

1) $24\text{س}-2\text{ع}+6$ ؛ $56\text{س}^3+14\text{س ع}-42\text{س}$.

2) $3\text{س}^2\text{ع}-18\text{س}^2+3\text{س ع}$ ؛ $-25\text{س}^2+15\text{س}+5$.

3) $-10\text{س ع}+2\text{س}^2+6\text{س ع}^2$ ؛ $-12\text{س}-6\text{س}^3-24\text{س}^2$.

14. حلّل كلاً مما يلي إلى جُداء عاملين ، حيث س عدد صحيح .

1) $(2\text{س}-3)(5\text{س}-1)-(2\text{س}-3)(\text{س}+1)$.

2) $(3\text{س}+1)(2\text{س}-1)+(3\text{س}+1)(\text{س}+2)$.

3) $(2\text{س}-1)(4\text{س}+1)-(7\text{س}+4)(4\text{س}+1)$.

15. $\text{ل}=(4\text{س}-3)^2-(3\text{س}-2)^2$

1) انشر ثم اكتب على أبسط شكل ممكن العبارة ل .

2) حلّل العبارة ل إلى جُداء عاملين .

3) إذا كانت $\text{س}=(-2)$ ، فاحسب ل .

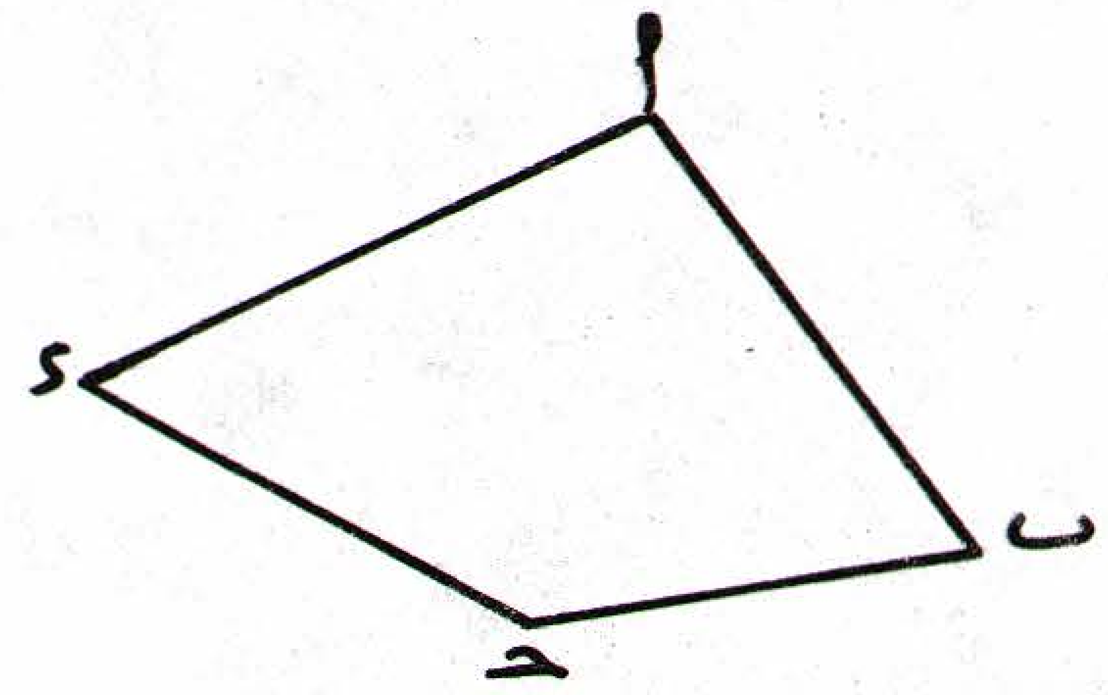
8 الرباعيات

1. مراجعة وتتمات

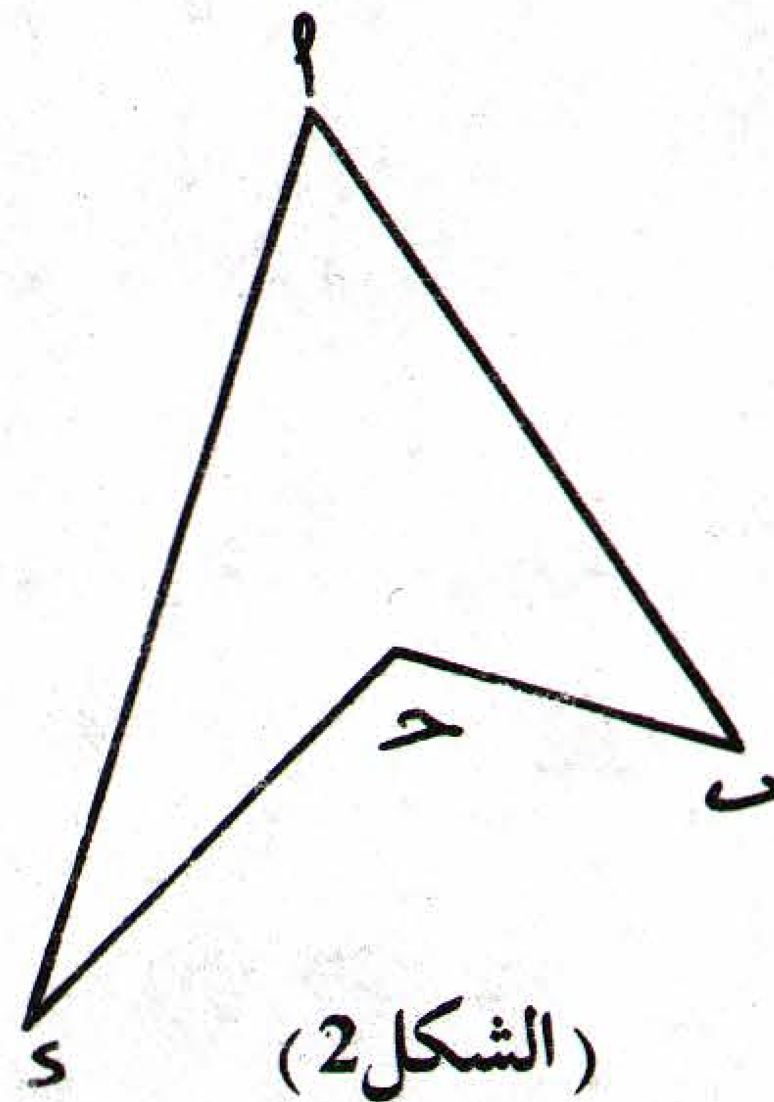
1) تعاريف :

الرباعي هو مضلع له أربعة أضلاع

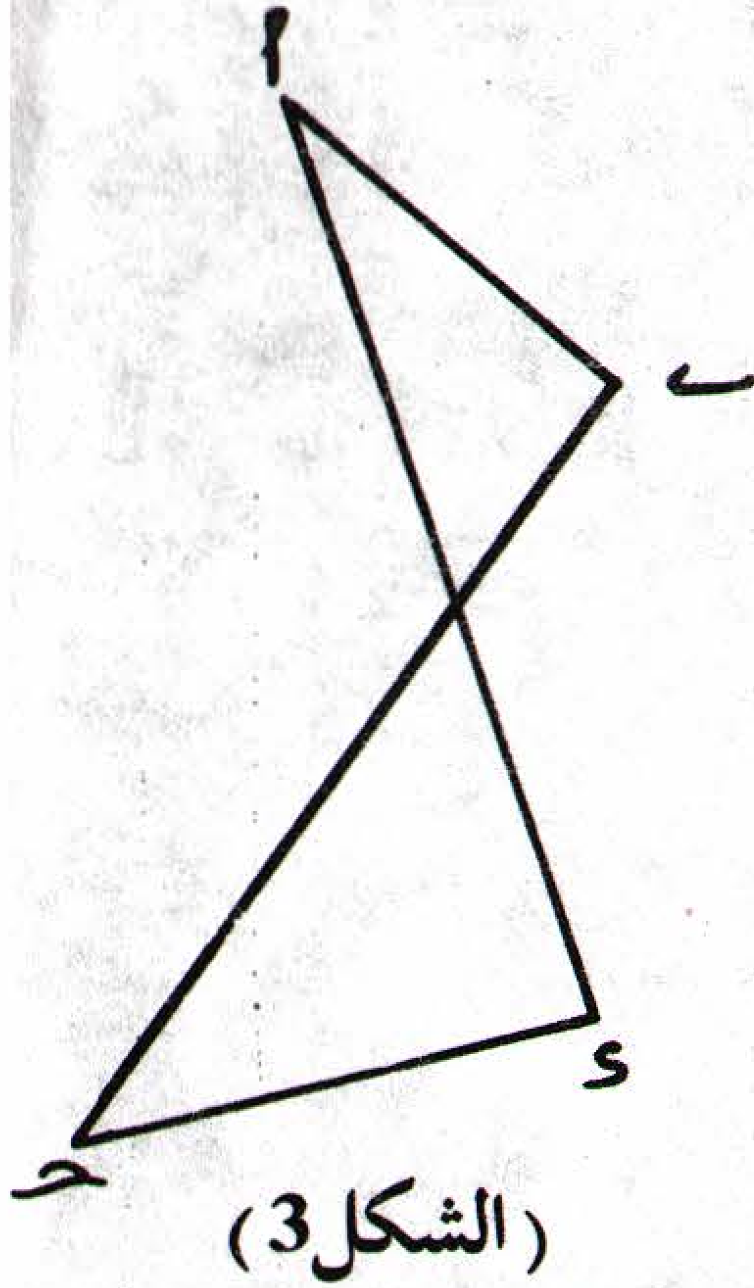
إليك الأشكال الآتية :



(الشكل 1)



(الشكل 2)



(الشكل 3)

ـ الشكل (1) يمثل رباعيا محدّبا ، وكل من الشكلين (2) ، (3) يمثل رباعيا غير محدّب .

ملاحظة :

- نهتم في دراستنا بالرباعيات المحدبة فقط وكلمة رباعي نعني بها « رباعي محدب » .
- في الشكل (4) ، أ ب حـ د رباعي .

ـ النقط أ ، ب ، حـ ، د هي **رؤوسه** .

ـ [أ ب] ، [ب حـ] ، [حـ د] ، [أ د] هي **أضلاعه** .

ـ [أ ب ، أ د] ، [ب أ ، ب حـ] ، [حـ ب ، حـ د] ، [د أ ، د حـ] هي **زواياه** .

ـ [أ حـ] و [ب د] هما **قطراه** .

ـ الضلعان المشتركان في نقطة هما **ضلعان متتاليان** (مثلا [أ ب] ، [ب حـ]) .

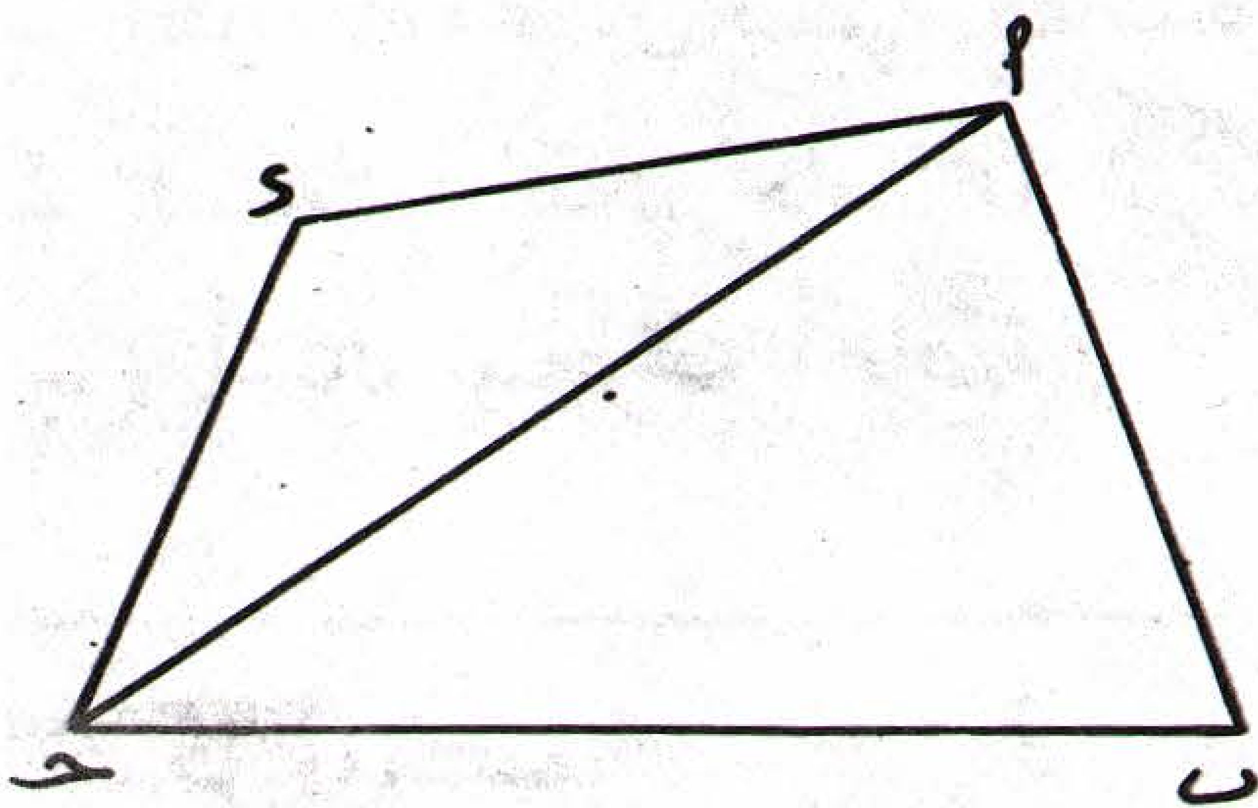
ـ والضلعان غير المتتاليين هما **ضلعان متقابلان** (مثلا [ب حـ] ، [أ د]) .

ـ الزاويتان المشتركتان في ضلع هما **زاويتان متتاليتان**
(مثلا [اب ، اى] ، [ى ا ، ى حـ]).

ـ والزاويتان غير المتتاليتين هما **زاويتان متقابلتان**
(مثلا [ب ا ، ب حـ] ، [ى ا ، ى حـ]).

2) مجموع أقياس زوايا رباعي :

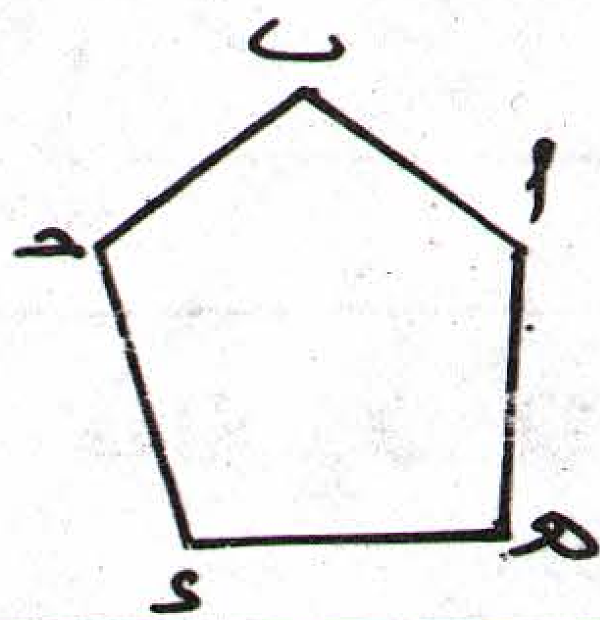
ا ب حـ ى رباعي . (الشكل 4) القطر [ا حـ]
هو ضلع مشترك للمثلثين ا ب حـ ، ا حـ ى .
لاحظ أن مجموع أقياس زوايا الرباعي ا ب حـ ى
هو مجموع أقياس زوايا هذين المثلثين
أي : $2 \times 180^{0} = 360^{0}$



(الشكل4)

نظرية : **مجموع أقياس زوايا رباعي يساوي 360^{0}**

ا ب حـ ى هـ خماسي محدب (الشكل 5)
ـ احسب مجموع أقياس زواياه .
ـ قارن هذا المجموع بالعدد : $(5 - 2) \times 180^{0}$.

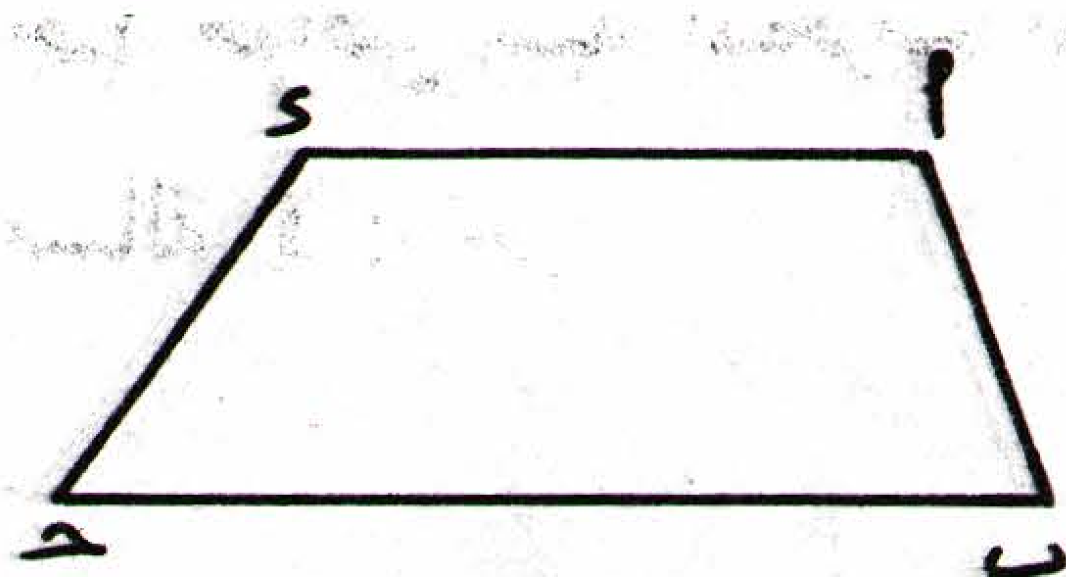


(الشكل5)

2. شبه المنحرف :

ا) تعريف :

شبه المنحرف هو رباعي له ضلعان حاملاهما متوازيان تماما والضلعان الآخران حاملاهما غير متوازين .



(الشكل 6)

في الشكل (6) أ ب حـ د شبه منحرف .

ـ الضلعان اللذان حاملاهما متوازيان هما **القاعدتان** .

ـ أطول القاعدتين تسمى **القاعدة الكبرى** ، وأقصرهما تسمى **القاعدة الصغرى** .

ـ الضلعان اللذان حاملاهما غير متوازيين هما **الضلعان الجانبيان** .

ب) أشباه المنحرف الخاصة :

الشكل والتسمية	التعريف
1) شبه المنحرف المتساوي الساقين (أ، د، ب، حـ)	شبه المنحرف المتساوي الساقين هو شبه منحرف ضلعاه الجانبيان متقايسان .
2) شبه المنحرف القائم (أ، د، ب، حـ)	شبه المنحرف القائم هو شبه منحرف له زاوية قائمة .

أ ب حـ د شبه منحرف حيث (أ د) // (ب حـ) .

ـ برهن أن $\hat{أ} + \hat{ب} = \hat{حـ} + \hat{د} = 180°$.

جـ) خواص شبه المنحرف المتساوي الساقين :

مسألة 1 :

• ا ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين حيث : ا ب = د جـ .

ا' ، د' هما المسقطان العموديان للنقطتين ا ، د على (ب جـ) .

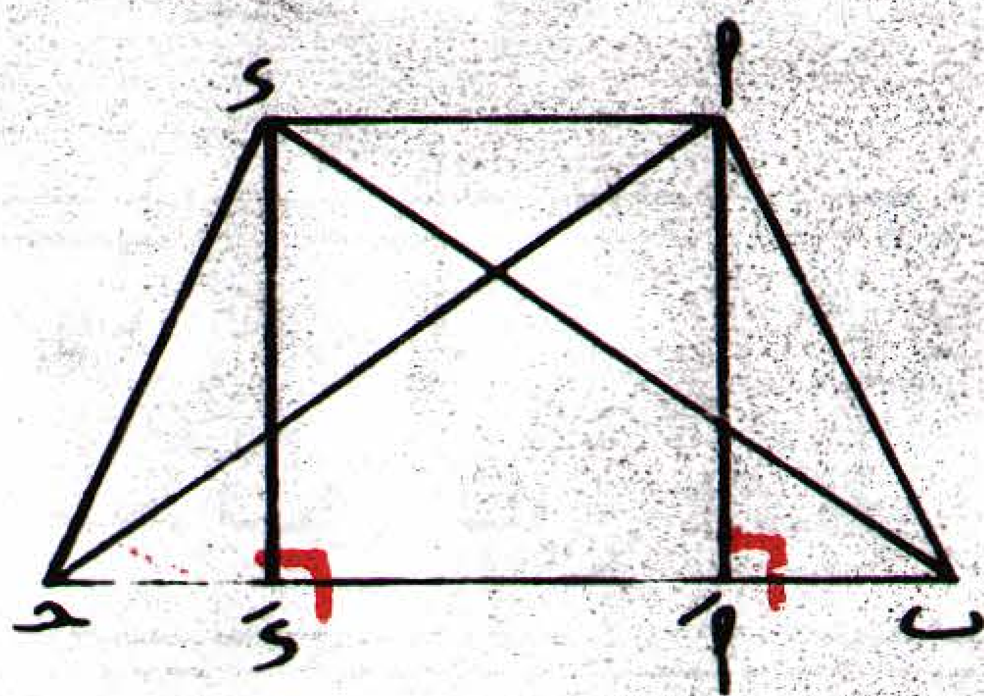
1) لنبرهن أن زاويتي القاعدة [ب جـ] متقايستان ، ولنستنتج أن زاويتي القاعدة [ا د] متقايستان .

2) ولنبرهن أن القطرين [ا جـ] ، [ب د] متقايسان .

المعطيات :

• ا ب جـ د شبه منحرف،حيث ا ب = د جـ وكل من ا ا' و د د' ارتفاع له .

المطلوب :



(الشكل7)

إثبات أن :

1) $\widehat{\text{ا ب جـ}} = \widehat{\text{د جـ ب}}$ و $\widehat{\text{ب ا د}} = \widehat{\text{جـ د ا}}$.

2) ا جـ = ب د .

البرهان :

1) المثلثان القائمان ا ا' ب ، د د' جـ متقايسان لأن :

• ا ب = د جـ (من المعطيات)
• ا ا' = د د' (كل من ا ا' ، د د' ارتفاع)

• وينتج من تقايس هذين المثلثين أن $\widehat{\text{ا ب ا'}} = \widehat{\text{د جـ د'}}$ أو $\widehat{\text{ا ب جـ}} = \widehat{\text{د جـ ب}}$.

• وأن $\widehat{\text{ب ا ا'}} = \widehat{\text{جـ د د'}}$ وبما أن $\widehat{\text{ا' ا د}} = \widehat{\text{د' د ا}} = 90°$

إذن $\widehat{\text{ب ا ا'}} + \widehat{\text{ا' ا د}} = \widehat{\text{جـ د د'}} + \widehat{\text{د' د ا}}$

أي $\widehat{\text{ب ا د}} = \widehat{\text{جـ د ا}}$.

فزاويتا كل من القاعدتين متقايستان .

2) في المثلثين أ حـ ب ، ء ب حـ لدينا :

- [ب حـ] ضلع مشترك
- أ ب حـ = ء حـ ب (من البرهان الأول)
- أ ب = ء حـ (من المعطيات)

فهذان المثلثان متقايسان .

ومنه أ حـ = ء ب أي أن القطرين [أ حـ] و [ب ء] متقايسان .

نظرية :

في شبه المنحرف المتساوي الساقين :

- **زاويتا كل من القاعدتين متقايستان .**
- **القطران متقايسان .**

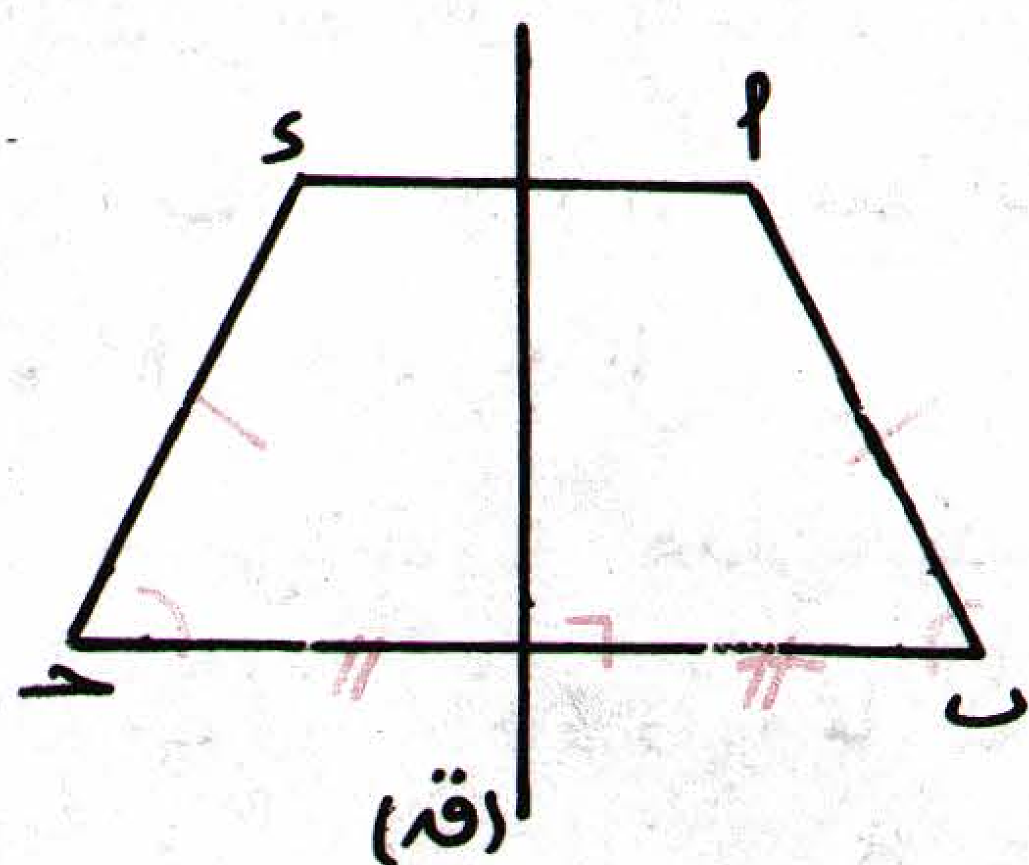
– برهن أنه إذا كانت زاويتا إحدى قاعدتي شبه منحرف متقايستين فهو شبه منحرف متساوي الساقين .

مسألة 2 :

أ ب حـ ء شبه منحرف متساوي الساقين حيث أ ب = ء حـ .

لنبرهن أن محور إحدى القاعدتين هو محور للقاعدة الأخرى .

ولنستنتج أنه محور تناظر لشبه المنحرف المتساوي الساقين أ ب حـ ء .



(الشكل 8)

البرهان :

نفرض أن (ﻫ) محور [ب ح] فتكون ب ، ح متناظرتين بالنسبة إلى (ﻫ) .
الزاويتان [ب ا ، ب ح] و [ح ء ، ح ب] متقايستان (حسب المسألة 1) ولهما ضلع مشترك وواقعتان في جهة واحدة بالنسبة إلى هذا الضلع ، فهما متناظرتان بالنسبة إلى (ﻫ) .

نستنتج أن [ب ا ، [ح ء متناظران بالنسبة إلى (ﻫ) .

وبما أن ب ا = ح ء فالضلعان الجانبيان [ب ا] و [ح ء] متناظران بالنسبة إلى (ﻫ) .

نستنتج أن النقطتين ا ، ء متناظرتان بالنسبة إلى (ﻫ) .

وهذا يعني أن (ﻫ) هو محور [ا ء] .

نظرية :

محور إحدى قاعدتي شبه منحرف متساوي الساقين هو محور القاعدة الأخرى .

نستنتج أن نظيرة أي نقطة من شبه منحرف متساوي الساقين بالنسبة إلى محور القاعدتين هي نقطة من شبه المنحرف المذكور .

نظرية :

محور قاعدتي شبه منحرف متساوي الساقين هو محور تناظر له .

نتيجة :

- **منتصفا الضلعين الجانبيين لشبه منحرف متقايس الساقين متناظران بالنسبة إلى محور تناظره .**

ا ب حـ ء شبه منحرف متساوي الساقين حيث ا ب = ء حـ .

ا) [illegible] حامل القطعة التي طرفاها منتصفا الضلعين الجانبيين يوازي حامل كل قاعدة .

2) بيّن أن نقطة تقاطع قطريه تنتمي إلى محور تناظره .

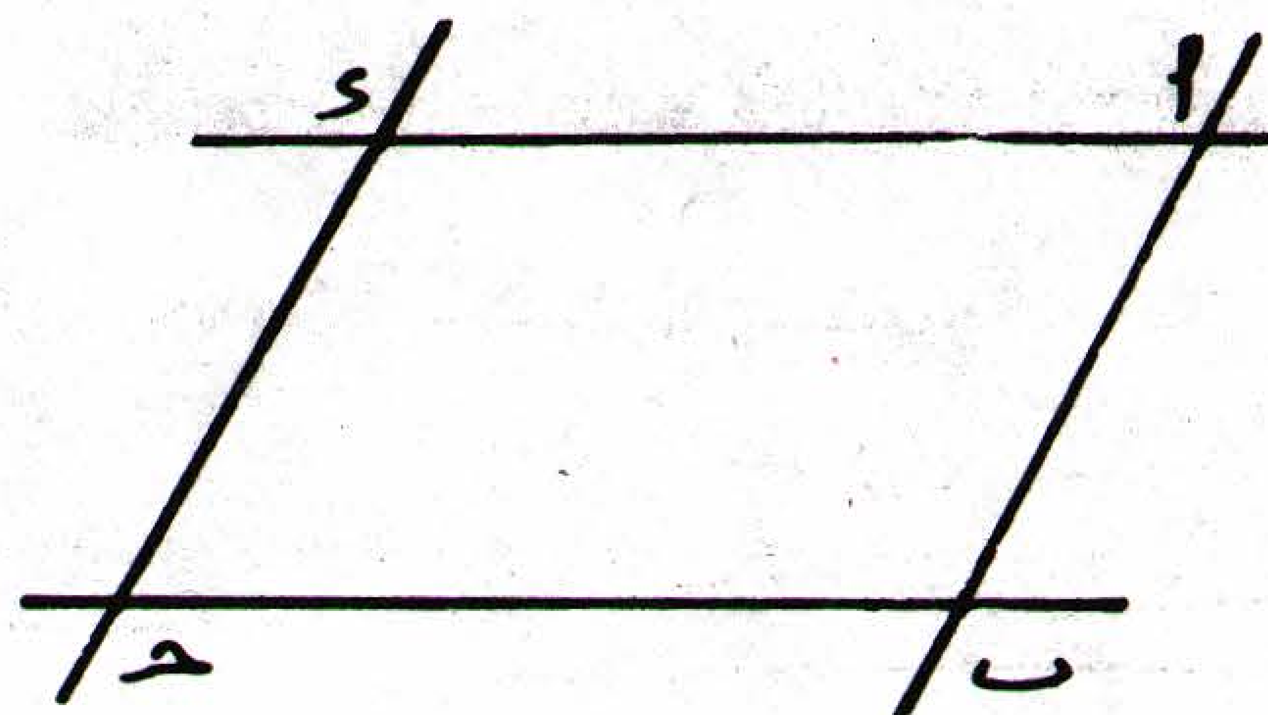
3. متوازي الأضلاع :

ا) تعريف :

متوازي الأضلاع هو رباعي حاملا كل ضلعين متقابلين منه متوازيان .

في الشكل (9) (ا ب) // (ء حـ) و (ا ء) // (ب حـ) .

فالرباعي ا ب حـ ء متوازي أضلاع .



(الشكل 9)

ا ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ، عيّن باستخدام المسطرة والمدور ثم المسطرة والكوس نقطة ء بحيث يكون الرباعي ا ب حـ ء متوازي أضلاع .

ب) متوازيات الأضلاع الخاصة :

المعين	المستطيل	المربع
أ ب ﺟ ء	أ ب ﺟ ء	أ ب ﺟ ء
المعين هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان	المستطيل هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة	المربع هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة وضلعان متتاليان متقايسان .

ملاحظة :

المربع هو مستطيل ومعين

نتيجة :

كل زاوية من زوايا المستطيل قائمة .

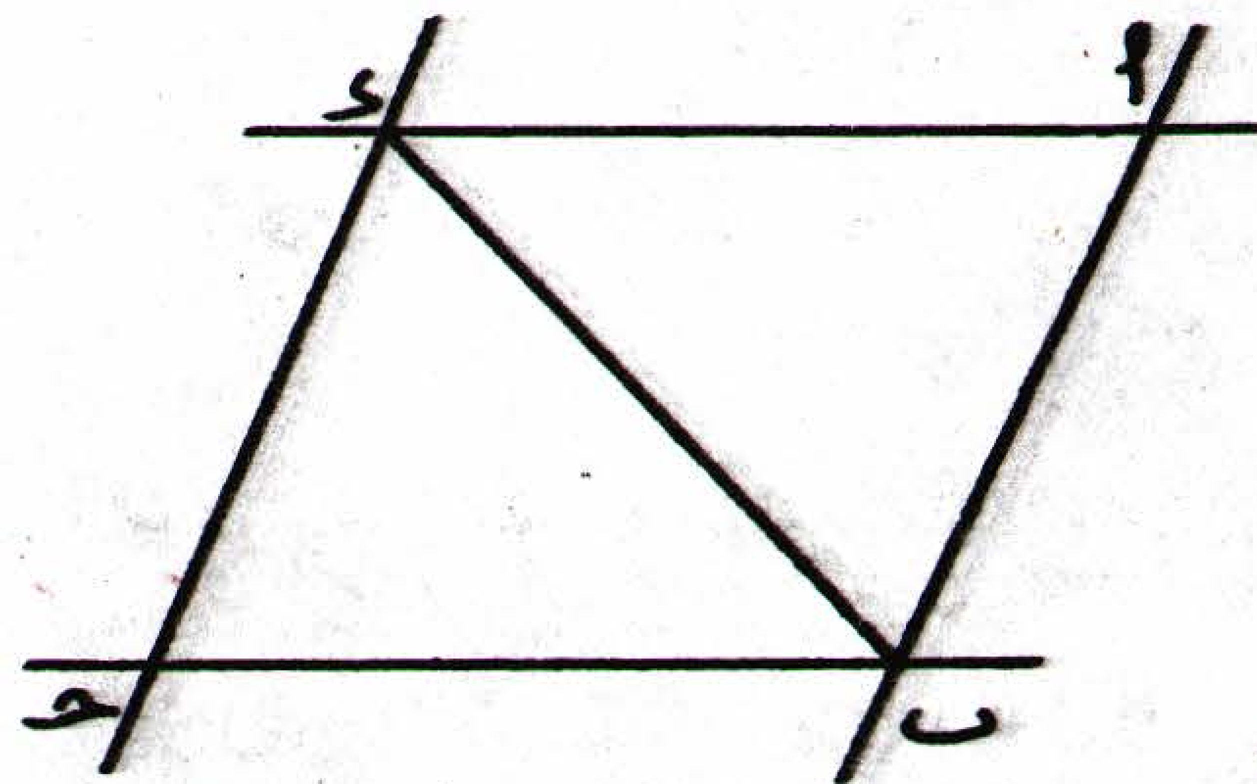
خواص متوازي الأضلاع

1. خواص الأضلاع :

مسألة 1 :

أ ب ﺟ ء متوازي أضلاع . الشكل (10) .

لنبرهن أن : أ ب = ء ﺟ ، أ ء = ب ﺟ .



(الشكل 10)

البرهان : نرسم القطر [ب د] .

المثلثان أ ب د و جـ د ب متقايسان لأن :

- [ب د] ضلع مشترك .
- $\widehat{أ ب د} = \widehat{جـ د ب}$ (الزاويتان [ب أ ، ب د] و [د جـ ، د ب] المتبادلتان داخليا بالنسبة إلى المتوازيين (أ ب) ، (د جـ) والقاطع (ب د) متقايستان)
- $\widehat{أ د ب} = \widehat{جـ ب د}$ (الزاويتان [د أ ، د ب] و [ب جـ ، ب د] المتبادلتان داخليا بالنسبة إلى المتوازيين (أ د) ، (ب جـ) والقاطع (ب د) متقايستان)

وينتج من تقايس هذين المثلثين أن : أ ب = د جـ و أ د = ب جـ .

نظرية :

كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متقايسان .

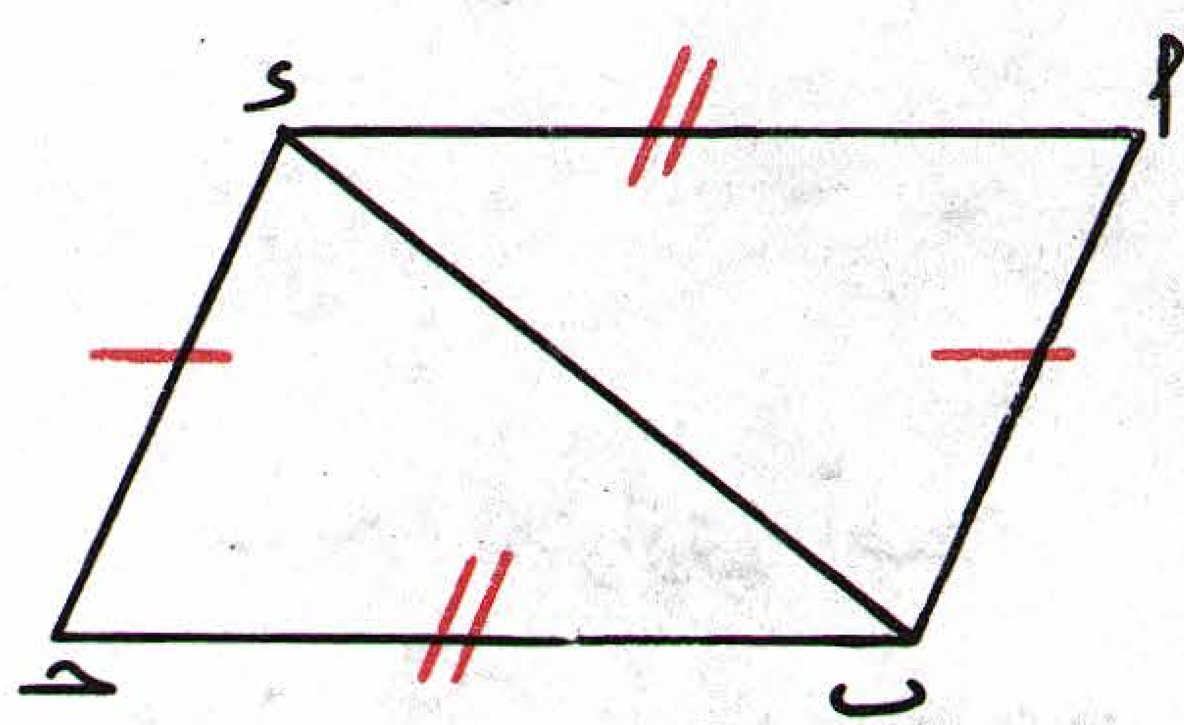
مسألة 2 :

أ ب جـ د رباعي حيث أ ب = د جـ ، أ د = ب جـ (الشكل 11) .

لنبرهن أن : أ ب جـ د متوازي أضلاع .

البرهان : نرسم القطر [ب د] .

المثلثان أ ب د ، جـ د ب متقايسان لأن :



(الشكل 11)

- اب = ى حـ (حسب المعطيات)
- اى = حـ ب (حسب المعطيات)
- [ب ى] ضلع مشترك .

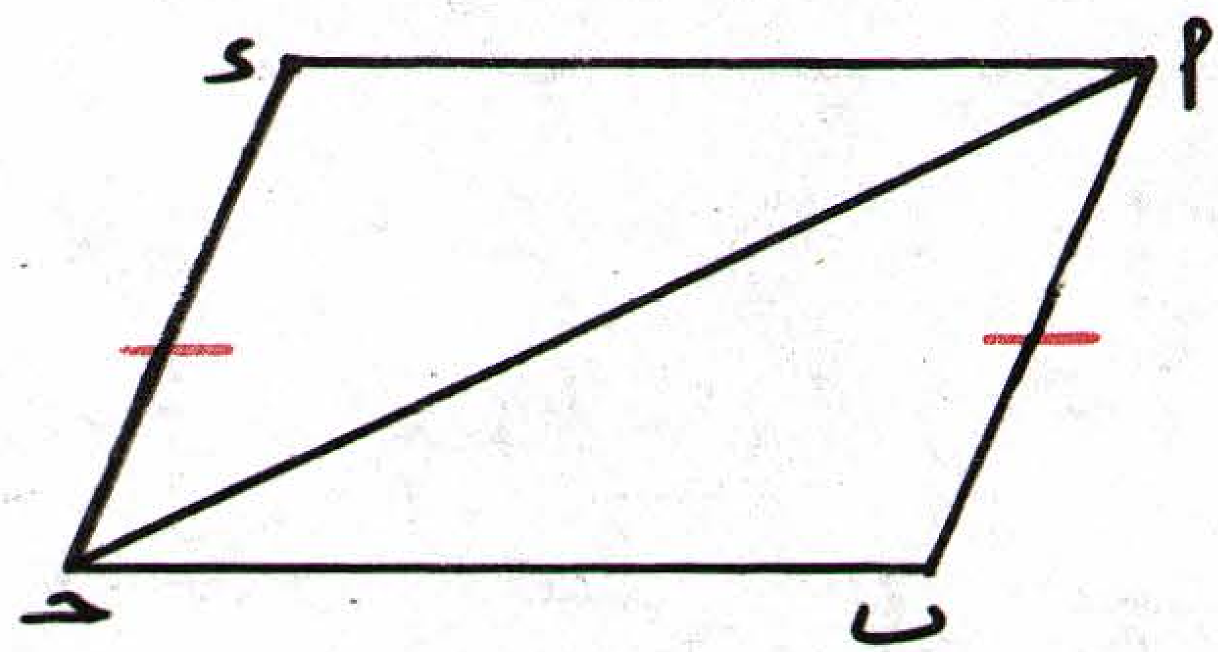
وينتج من تقايس هذين المثلثين أن : ا ى ب = حـ ب ى وأن ا ب ى = حـ ى ب .
فالزاويتان [ى ا ، ى ب] و [ب حـ ، ب ى] متقايستان وهما متبادلتان داخليا بالنسبة إلى المستقيمين (ا ى) و (ب حـ) والقاطع (ب ى) .
إذن (ا ى) // (ب حـ) .
وبنفس الطريقة نبرهن أن (ا ب) // (ى حـ)
في الرباعي ا ب حـ ى لدينا : (ا ى) // (ب حـ) و (ا ب) // (ى حـ) فهذا يعني أن ا ب حـ ى متوازي أضلاع .

نظرية :

يكون الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كل ضلعين متقابلين متقايسين .

مسألة 3 :

ا ب حـ ى رباعي، حيث ا ب = ى حـ و (ا ب) // (ى حـ) (الشكل 12) .
لنبرهن أن ا ب حـ ى متوازي أضلاع .



(الشكل 12)

البرهان : نرسم القطر [ا حـ] .
المثلثان ا ب حـ ، حـ ى ا متقايسان لأن .

- ا ب = ى حـ (حسب المعطيات) .
- [ا حـ] ضلع مشترك .
- ب ا حـ = ا حـ ى (الزاويتان [ا ب ، ا حـ] و [حـ ا ، حـ ى] المتبادلتان داخليا بالنسبة إلى المتوازيين (ا ب) ، (ى حـ) والقاطع (ا حـ) متقايستان) .

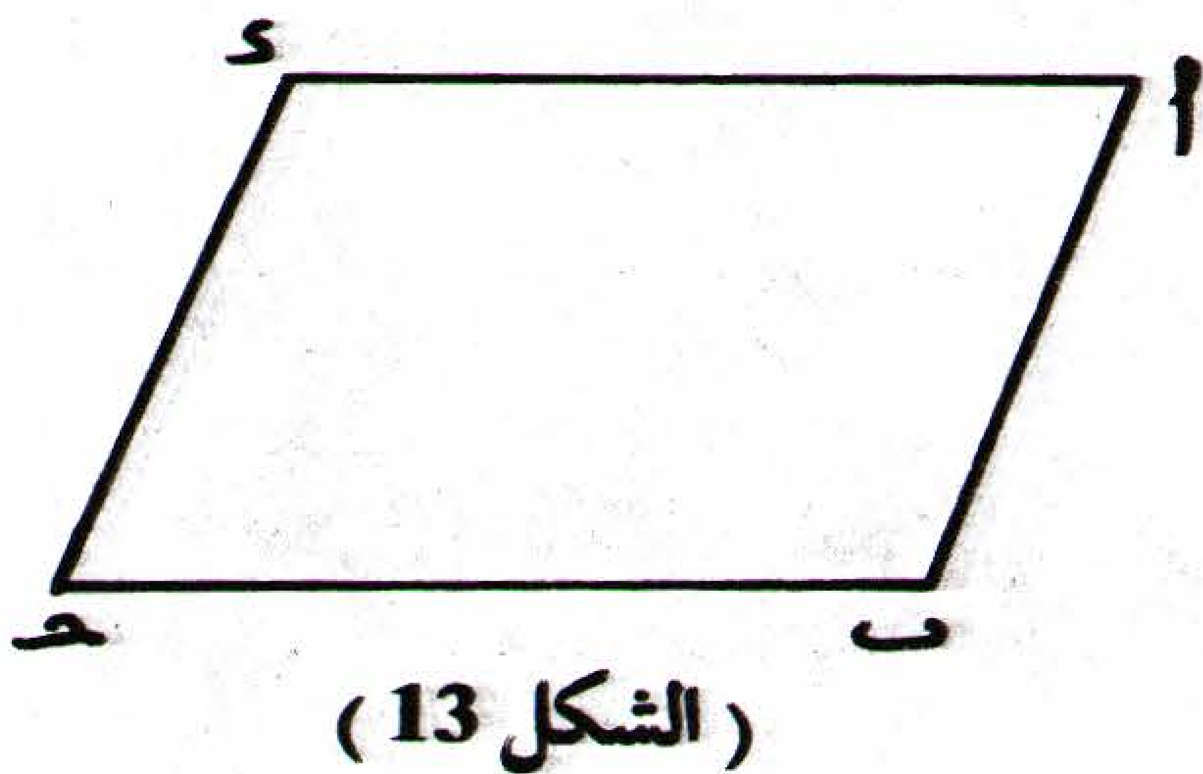
وينتج من تقايس هذين المثلثين أن الضلعين [أ د] ، [ب حـ] متقايسان.
في الرباعي أ ب حـ د لدينا : أ ب = د حـ و أ د = ب حـ .
أي كل ضلعين متقابلين متقايسان ، فهو متوازي أضلاع (حسب النظرية السابقة)

نظرية :

يكون الرباعي متوازي أضلاع إذا كان له ضلعان متقابلان متقايسين وحاملاهما متوازيين .

2. خواص الزوايا :

مسألة 1 :



(الشكل 13)

أ ب حـ د متوازي أضلاع (الشكل 13)
لنبرهن أن كل زاويتين متقابلتين متقايستان .
أي : $\hat{أ} = \hat{حـ}$ و $\hat{ب} = \hat{د}$.

البرهان :

ـ بما أن (أ د) // (ب حـ) و (أ ب) قاطع لهما ، فالزاويتان الداخليتان الواقعتان في نفس الجهة بالنسبة إلى هذا القاطع متكاملتان .
أي : $\hat{أ} + \hat{ب} = 180°$ (1)

ـ وبما أن (أ ب) // (د حـ) و (ب حـ) قاطع لهما ، فالزاويتان الداخليتان الواقعتان في نفس الجهة بالنسبة إلى هذا القاطع متكاملتان .
أي : $\hat{ب} + \hat{حـ} = 180°$ (2)

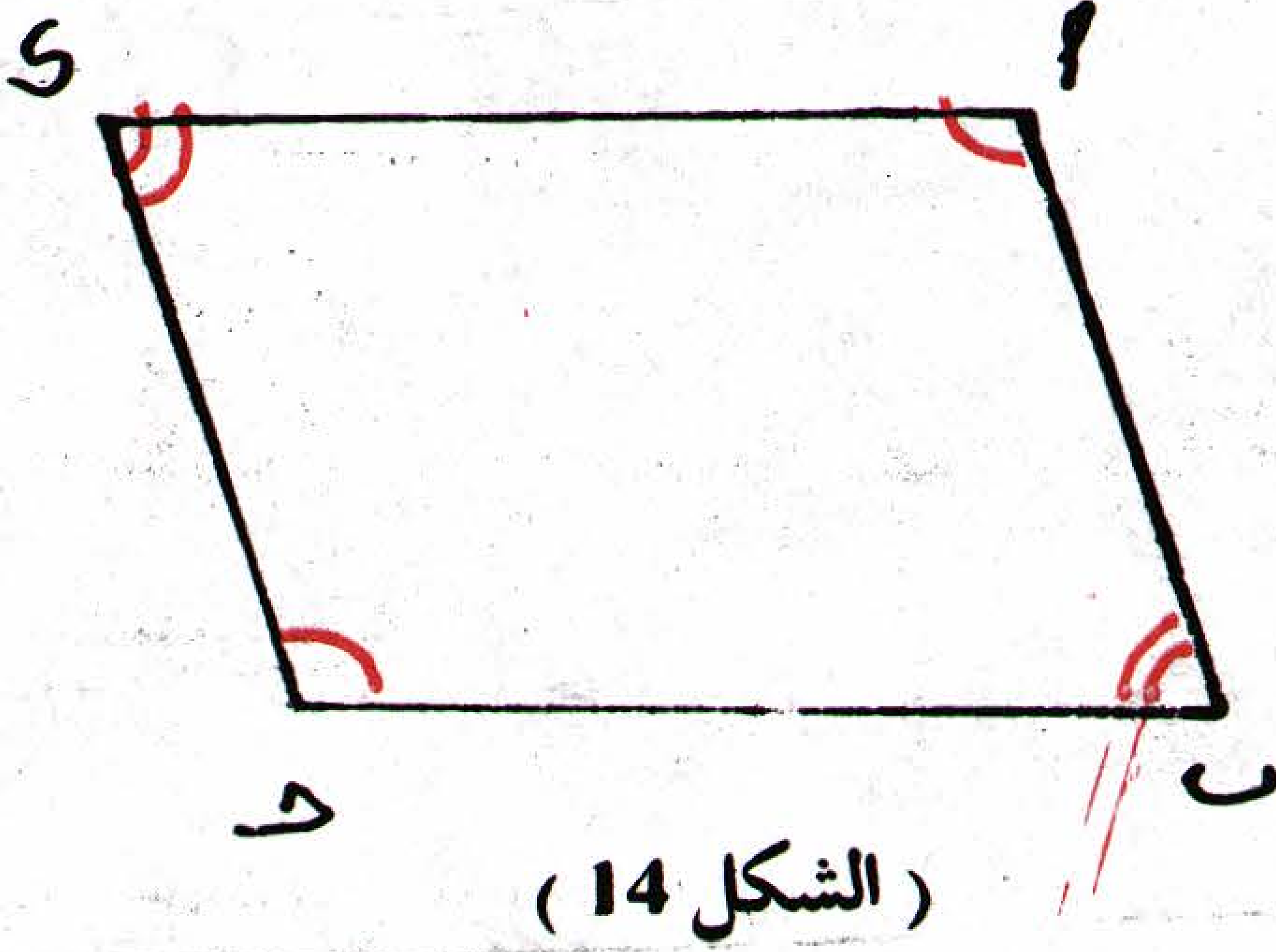
من المساواتين (1) ، (2) ينتج أن : $\hat{أ} + \hat{ب} = \hat{حـ} + \hat{ب}$ ومنه $\hat{أ} = \hat{حـ}$.
فالزاويتان المتقابلتان [أ د ، أ ب] ، [حـ د ، حـ ب] متقايستان .

وبنفس الطريقة نبرهن أن الزاويتين المتقابلتين [ب أ ، ب حـ] ، [د أ ، د حـ] متقايستان .

نظرية :

كل زاويتين متقابلتين في متوازي أضلاع متقايستان .

مسألة 2 :



(الشكل 14)

أ ب جـ د رباعي، حيث $\hat{\text{أ}} = \hat{\text{جـ}}$

و $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{د}}$ (الشكل 14) .

لنبرهن أن أ ب جـ د متوازي أضلاع

البرهان :

ـ نعلم أن مجموع أقياس الزوايا الداخلية لرباعي هو $360°$.

فيكون : $\hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}} + \hat{\text{جـ}} + \hat{\text{د}} = 360°$.وبما أن : $\hat{\text{أ}} = \hat{\text{جـ}}$ و $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{د}}$ (حسب المعطيات) .

إذن : $\hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}} + \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}} = 360°$.

أو : $\hat{\text{أ}} + \hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}} + \hat{\text{ب}} = 360°$.

أي : $2\hat{\text{أ}} + 2\hat{\text{ب}} = 360°$.

ومنه : $2(\hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}}) = 360°$.

نستنتج أن : $\hat{\text{أ}} + \hat{\text{ب}} = 180°$.

فالزاويتان [أ د ، أ ب] و [ب أ ، ب جـ] الداخليتان والواقعتان في نفس الجهة بالنسبة إلى المستقيم (أ ب) القاطع للمستقيمين (أ د) و (ب جـ) متكاملتان .

فالمستقيمان (أ د) و (ب جـ) متوازيان .

ـ وبنفس الطريقة نبرهن أن المستقيمين (أ ب) و (د جـ) متوازيان .

• في الرباعي أ ب جـ د كل ضلعين متقابلين حاملاهما متوازيان .

هذا يعني أن الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع .

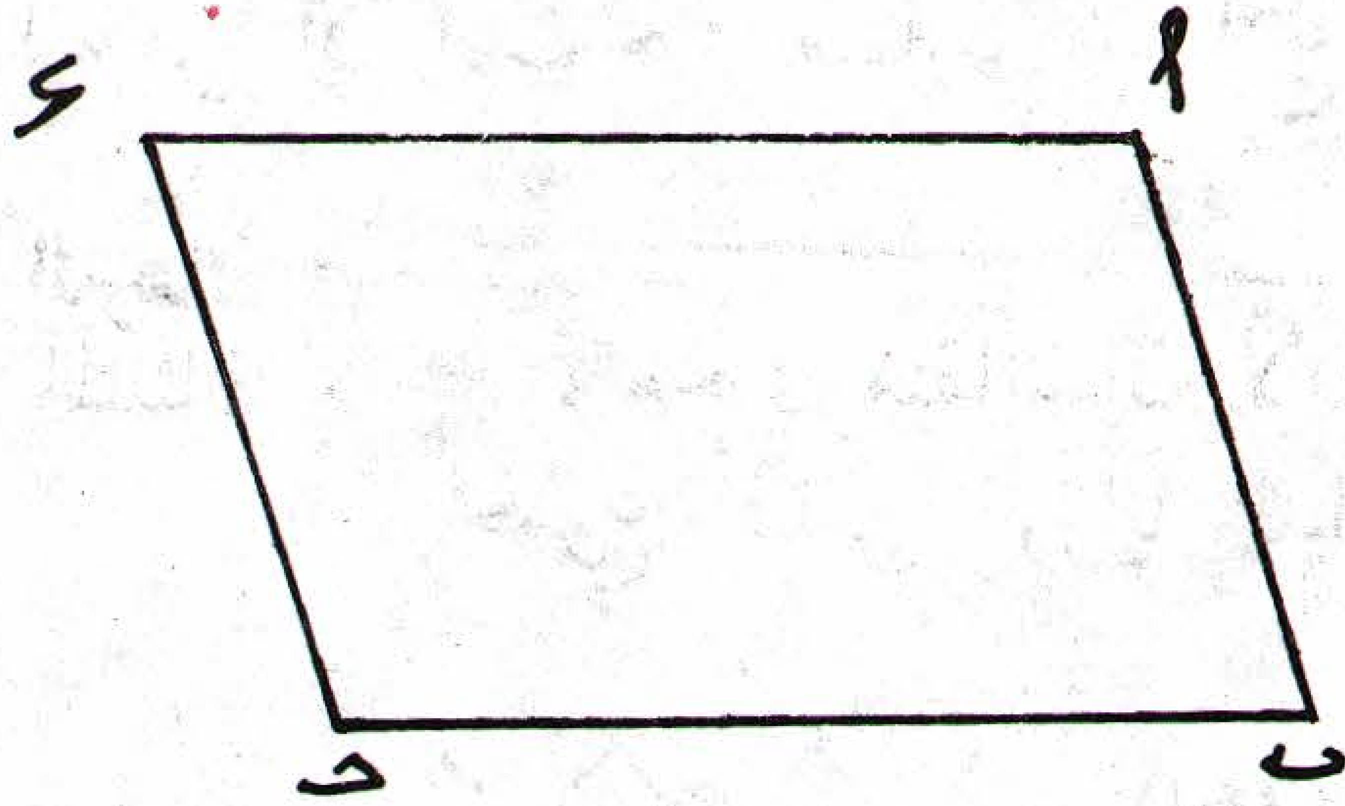
نظرية :

إذا كان في رباعي كل زاويتين متقابلتين متقايستين فهو متوازي أضلاع .

مسألة 3 :

ا ب حـ ء رباعي حيث الزاوية [ب ا ، ب حـ] تكمل كلا من الزاويتين [ا ء ، ا ب] و [حـ ب ، حـ ء] أي $\hat{ب} + \hat{ا} = 180°$ و $\hat{ب} + \hat{حـ} = 180°$.

ـ لنبرهن أن ا ب حـ ء متوازي أضلاع .



(الشكل 15)

البرهان :

بما أن : $\hat{ب} + \hat{ا} = 180°$.

فالزاويتان [ا ء ، ا ب] ، [ب ا ، ب حـ] الداخليتان الواقعتان في جهة واحدة بالنسبة إلى (ا ب) القاطع للمستقيمين (ا ء) و (ب حـ) متكاملتان .

نستنتج أن : (ا ء) // (ب حـ) (1) .

وبما أن : $\hat{ب} + \hat{حـ} = 180°$.

فالزاويتان [ب ا ، ب حـ] و [حـ ب ، حـ ء] الداخليتان الواقعتان في جهة واحدة بالنسبة إلى (ب حـ) القاطع للمستقيمين (ا ب) و (ء حـ) متكاملتان .

نستنتج أن : (ا ب) // (ء حـ) (2) .

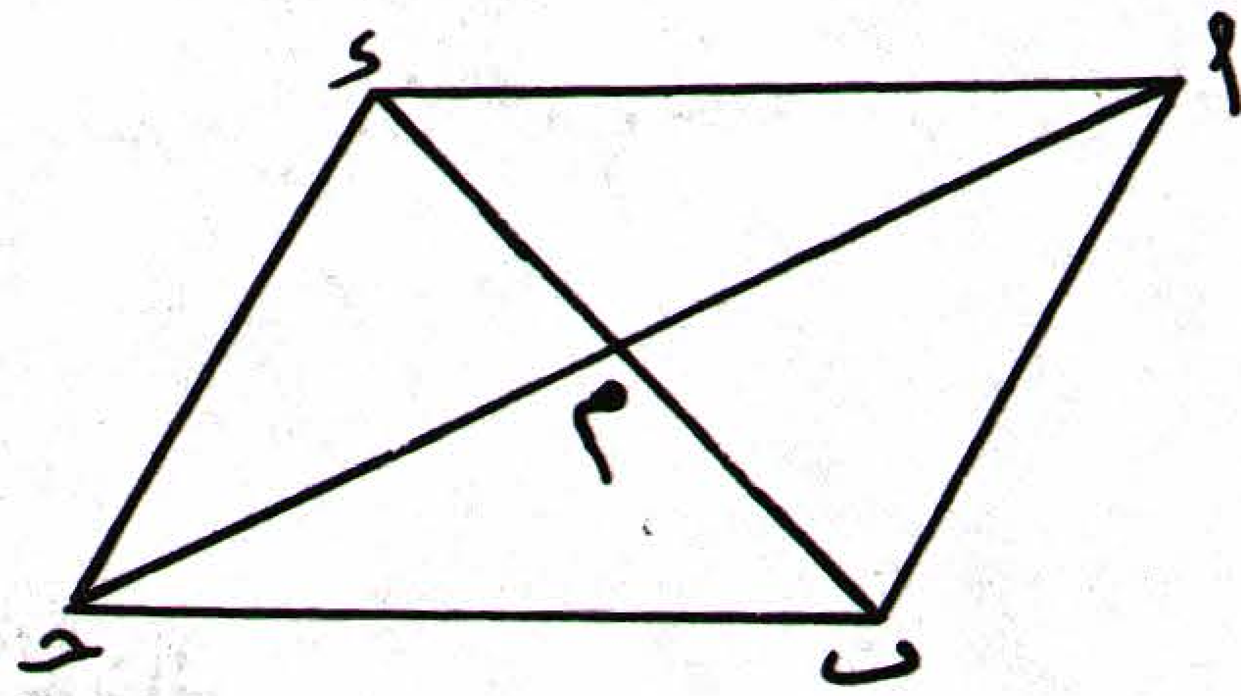
من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي ا ب حـ ء متوازي أضلاع .

نظرية :

إذا كان لرباعي زاوية مكملة لكل من الزاويتين المتتاليتين معها فإن هذا الرباعي متوازي أضلاع .

3. خواص القطرين :

مسألة 1 :



(الشكل 16)

ا ب حـ ء متوازي أضلاع ،

م نقطة تقاطع قطريه الشكل (16) .

لنبرهن أن النقطة م هي منتصف

كل من القطرين [ا ء] ، [ب حـ] .

البرهان :

المثلثان م ا ب ، م حـ ء متقايسان لأن :

- ا ب = حـ ء (من خواص أضلاع متوازي الأضلاع) .
- م ا ب = م حـ ء (الزاويتان [ا ب ، ا حـ] ، [حـ ا ، حـ ء] المتبادلتان داخليا بالنسبة إلى المتوازيين (ا ب) و (ء حـ) والقاطع (ا حـ) متقايستان) .
- م ب ا = م ء حـ (الزاويتان [ب ا ، ب ء] ، [ء حـ ، ء ب] المتبادلتان داخليا بالنسبة إلى المتوازيين (ا ب) و (ء حـ) والقاطع (ب ء) متقايستان) .

نستنتج من تقايس هذين المثلثين أن :

م ا = م حـ و م ب = م ء .

فالقطران [ا ء] و [ب حـ] متناصفان .

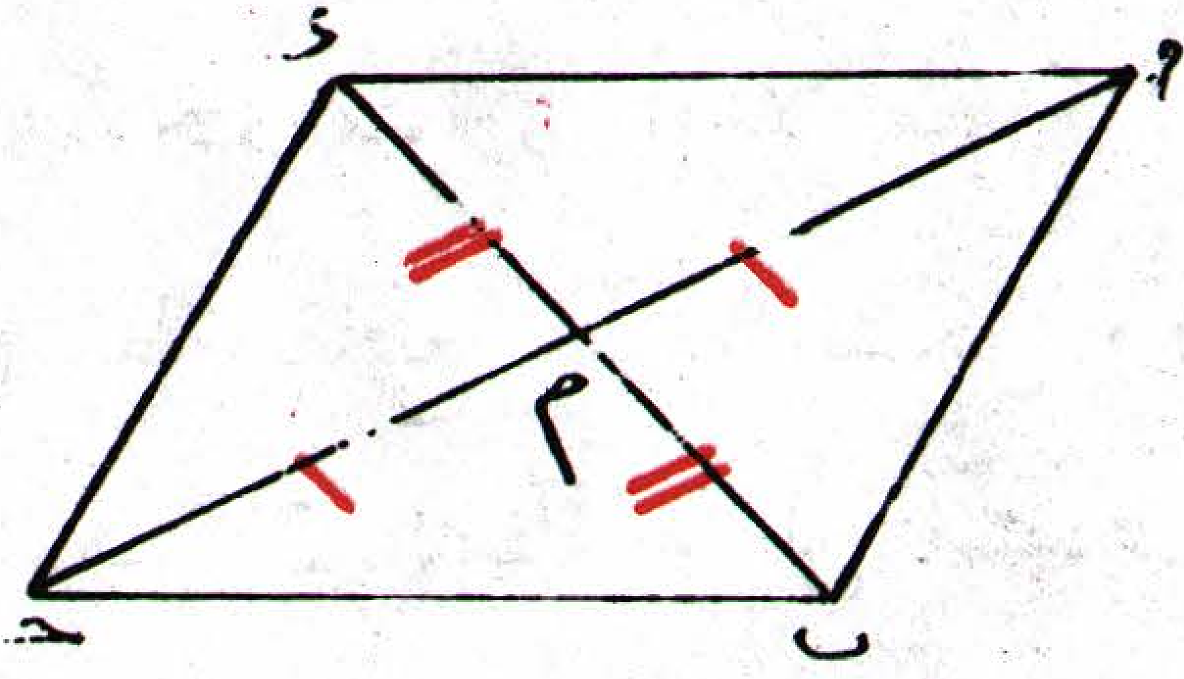
نظرية :

قطرا متوازي الأضلاع متناصفان

مسألة 2 :

ا ب حـ ء رباعي ، قطراه [ا حـ] ، [ب ء] لهما نفس المنتصف م . (الشكل 17) .

ـ لنبرهن أن ا ب حـ ء متوازي أضلاع .



(الشكل 17)

البرهان :

م منتصف [ا حـ] يعني أن حـ نظيرة ا بالنسبة إلى م .

م منتصف [ب ء] يعني أن ب نظيرة ء بالنسبة إلى م .

ونعلم أن م نظيرة نفسها بالنسبة إلى م .

ـ نستنتج أن المثلثين م ا ء ، م حـ ب متناظران بالنسبة إلى م فهما متقايسان .

إذن ا ء = ب حـ .

ـ وأن المثلثين ا م ب ، حـ م ء متناظران بالنسبة إلى م فهما متقايسان .

إذن ا ب = ء حـ .

في الرباعي ا ب حـ ء كل ضلعين متقابلين متقايسان،فهذا الرباعي متوازي أضلاع .

نظرية :

إذا كان قطرا رباعي متناصفين فإن هذا الرباعي متوازي أضلاع .

ونستنتج أن نظيرة أي نقطة من متوازي الأضلاع ا ب حـ ء بالنسبة إلى م هي نقطة منه . فالنقطة م هي مركز تناظر له .

نظرية :

نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع هي مركز تناظر له .

التمارين

1. ا ب حـ مثلث حيث $\widehat{ا} = 70^\circ$ ، $\widehat{ب} = 60^\circ$.
منصف [ب ا ، ب حـ] يقطع [ا حـ] في ء ، العمود (ا هـ) على (ب حـ) يقطع [ب ء] في ﻫ .
– احسب قيس كل من زوايا الرباعي ﻫ هـ حـ ء .

2. المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متقايسة وزواياه متقايسة .
1) ا ب حـ ء هـ و سداسي منتظم (مضلع ذو ستة أضلاع) .
احسب مجموع أقياس زواياه ، ثم استنتج قيس كل زاوية منه .
2) احسب مجموع أقياس زوايا ثماني (مضلع ذو ثمانية أضلاع) منتظم ، ثم استنتج قيس كل زاوية منه .

3. [ا ب] قطعة مستقيمة ، [ا س ، [ب ع نصفا مستقيمين في جهة واحدة بالنسبة إلى (ا ب) حيث $\widehat{س ا ب} = 95^\circ$ ، $\widehat{ع ب ا} = 55^\circ$.
حـ نقطة من [ب ع بحيث ب حـ > ا ب ، [حـ ص نصف مستقيم يقطع [ا س في ء بحيث $\widehat{ب حـ ء} = 70^\circ$.
1) احسب $\widehat{ا ء حـ}$.
2) نضع (ا ب) ∩ (ء حـ) = {ق} ، (ا ء) ∩ (حـ ب) = {ك} .
احسب $\widehat{ب ق حـ}$ ، $\widehat{ا ك ب}$.
3) المستقيم الذي يشمل ء ويوازي (ا ب) يقطع (ب حـ) في النقطة هـ .
احسب كلا من $\widehat{ء هـ ب}$ و $\widehat{ا ء هـ}$.
4) بيّن أن الرباعي ء ق ب هـ هو شبه منحرف متساوي الساقين .

4. ا ب حـ ء شبه منحرف قاعدتاه [ا ب] و [ء حـ] بحيث ا ب = ا ء .
1) ما نوع المثلث ا ب ء ؟
2) برهن أن [ء ب منصف الزاوية [ء ا ، ء حـ] .

5. ا ب حـ ء رباعي بحيث الضلعان [ا ء] ، [ب حـ] متقايسان وقطراه [ا حـ] ، [ب ء] متقايسان .
1) برهن أن المثلثين ا ب ء ، ب ا حـ متقايسان واستنتج أن $\widehat{ب ا ء} = \widehat{ا ب حـ}$.

2) برهن أن المثلثين ا حـ ء ، ب ء حـ متقايسان واستنتج أن $\widehat{اءحـ} = \widehat{بحـء}$.
3) بيّن أن الرباعي ا ب حـ ء شبه منحرف متساوي الساقين .

6. [م س ، م ع] و [م′ س′ ، م′ ع′] زاويتان بحيث (م س) // (م′ س′) و (م ع) // (م′ ع′) . ب ∈ [م س ، ب′ ∈ [م′ س′ بحيث م ب = م′ ب′
حـ ∈ [م ع ، حـ′ ∈ [م′ ع′ .بحيث م حـ = م′ حـ′ .
1) برهن أن كلا من الرباعيين م م′ ب′ ب ، م م′ حـ′ حـ هو متوازي أضلاع .
2) استنتج أن [ب′ حـ′] و [ب حـ] متقايسان وحامليهما متوازيان .

7. ا ب حـ مثلث .
ـ أنشىء متوازيات الأضلاع ا ب حـ ء ، ب حـ ا هـ ، حـ ا ب ﻫ .
1) برهن أن النقط ا ، ب ، حـ هي على الترتيب منتصفات القطع [ء هـ] ، [هـ ﻫ] ، [ء ﻫ] .
2) برهن أن أي عمود للمثلث ا ب حـ هو محور للمثلث ء هـ ﻫ .
3) استنتج أن نقطة تقاطع محاور المثلث ء هـ ﻫ هي نفسها نقطة تقاطع أعمدة المثلث ا ب حـ .

8. ا ب حـ ء متوازي أضلاع ، هـ ، و منتصفا الضلعين [ا ب] ، [حـ ء] على الترتيب القطر [ا حـ] يقطع [ء هـ] و [ب و] في النقطتين م ، ﻫ على الترتيب .
1) برهن أن المثلثين ا م هـ ، حـ ﻫ و متقايسان ، ثم استنتج أن ا م = حـ ﻫ .
2) المستقيم الذي يشمل ﻫ ويوازي (ا ب) يقطع [ء هـ] في ط .
برهن أن الرباعي هـ ب ﻫ ط متوازي أضلاع .
3) برهن أن المثلثين ا م هـ ، ﻫ م ط متقايسان واستنتج أن ا م = ﻫ م .
4) استنتج أن ا م = م ﻫ = ﻫ حـ .

9. ا ب حـ ء متوازي أضلاع ، و منتصف ضلعه [ب حـ] ، م ∈ [ا و حيث أن ا م = 2 ا و .
ـ برهن أن النقطة حـ هي منتصف القطعة [ء م] .

10. ا ب حـ ء متوازي أضلاع حيث منصفا الزاويتين [ب ا ، ب حـ] و [حـ ب ، حـ ء] يتقاطعان في نقطة م .
1) بيّن أن المثلث ب م حـ قائم في م .

2) نضع (ب م) ∩ (أ د) = {هـ}. برهن أن أ هـ = أ ب.
3) نضع (ب م) ∩ (جـ د) = {ن}. بيّن أن المثلث جـ ب ن متساوي الساقين.

11. أ ب جـ د متوازي أضلاع ، منصف الزاوية [أ ب ، أ د] يقطع (ب جـ) في م ،
منصف الزاوية [جـ ب ، جـ د] يقطع (أ د) في ن .
1) برهن أن الرباعي أ م جـ ن متوازي أضلاع .
2) برهن أن للقطع [أ جـ] ، [ب د] ، [م ن] نفس المنتصف .
3) برهن أن الرباعي ب م د ن متوازي أضلاع .

12. أ ب جـ د متوازي أضلاع ، م ، ن ، ف ، ك هي على الترتيب منتصفات أضلاعه
[أ ب] ، [ب جـ] ، [جـ د] ، [د أ] .
1) برهن أن (م د) // (ب ف) وأن [ب د] و [م ف] لهما نفس المنتصف هـ .
2) برهن أن الرباعي ب ن د ك هو متوازي أضلاع وأن النقط ن ، هـ ، ك على استقامة واحدة .

13. أ ب جـ د متوازي أضلاع ، هـ ، ف ، ك ، ط أربع نقاط بحيث :
هـ ∈ [أ ب] ، ف ∈ [ب جـ] ، ك ∈ [جـ د] ، ط ∈ [د أ] و أ هـ = جـ ك ، ب ف = د ط .
1) برهن أن الرباعي أ هـ جـ ك متوازي أضلاع .
2) برهن أن (أ ف) // (جـ ط) وأن أ ف = جـ ط .
3) برهن أن للقطع [أ جـ] ، [ب د] ، [ف ط] نقطة مشتركة هي منتصف كل منهما .
4) برهن أن الرباعي هـ ف ك ط متوازي أضلاع .

14. أ ب جـ د متوازي أضلاع م ، ف ، ل ، ك هي على الترتيب منتصفات الأضلاع
[أ ب] ، [ب جـ] ، [جـ د] ، [د أ] .
1) برهن أن الرباعي م ف ل ك متوازي أضلاع .
2) برهن أن للرباعيين أ ب جـ د ، م ف ل ك نفس مركز التناظر .

15. أ ب جـ د متوازي أضلاع ، م نقطة تقاطع قطريه . هـ ، هـ′ هما المسقطان العموديان للنقطتين أ ، جـ على المستقيم (ب د) على الترتيب .
ك ، ك′ هما المسقطان العموديان للنقطتين ب ، د على المستقيم (أ جـ) على الترتيب .
ـ برهن أن الرباعي هـ ك ك′ هـ′ متوازي أضلاع .

9 مجموعة الأعداد الناطقة

المجموعة $\mathbb{Q}$

حاصل القسمة التام لعدد صحيح على آخر

مسألة 1 : هل يوجد عدد صحيح س ، بحيث $(+3)$. س $= (+15)$ ؟

نعم ، إنه العدد الصحيح الموجب $(+5)$ ، ونسميه **حاصل القسمة التام** للعدد الصحيح $(+15)$ على العدد الصحيح $(+3)$. ونرمز له بالرمز $\frac{+15}{+3}$.

فيكون $(+3) \times (+5) = (+15)$

أي $(+3) \times \left(\frac{+15}{+3}\right) = (+15)$

• **ملاحظة** :

لا يوجد حاصل القسمة التام لعدد صحيح على عدد صحيح معدوم .

مثلا :

• لا يوجد أي عدد صحيح س ، بحيث 0 . س $= 4$.

• يوجد عدد غير منته من الأعداد الصحيحة س ، بحيث 0 . س $= 0$.

مسألة 2 :

ـ هل يوجد عدد صحيح س ، بحيث 10 . س $= 38$ ؟ لا .

ـ هل يوجد عدد عشري س ، بحيث 10 . س $= 38$ ؟ نعم .

إنه العدد العشري **3,8**

نقول إنّ العدد العشري **3,8** هو **حاصل القسمة التام** للعدد الصحيح 38 على العدد الصحيح 10 .

ونكتب **3,8** $\frac{38}{10}$

ويكون 10 ، **3,8** 38 أي 10 ، $\frac{38}{10}$ 38 .

مسألة 3 :

ـ هل يوجد عدد صحيح أو عشري س ، بحيث 7 س 5 ؟ لا .

ـ هل يوجد عدد كسري س ، بحيث 7 س 5 ؟ نعم . إنه العدد الكسري $\frac{5}{7}$

لأن 7 × $\frac{5}{7}$ 5 .

نقول إن $\frac{5}{7}$ هو **حاصل القسمة التام** للعدد 5 على العدد 7 .

1. العدد الناطق

ـ هل يوجد عدد صحيح أو كسري س ، بحيث (3) س (4) ؟ لا .

في هذه الحالة **نقبل** أنه يوجد عنصر س من مجموعة أوسع من كل من المجموعات العددية ط ، ص ، ك . هذه المجموعة تسمى **مجموعة الأعداد الناطقة** . ونرمز إليها بالرمز ك فالعدد س الذي نبحث عنه هو **عدد ناطق** .

نكتب س = $\frac{-4}{+3}$

• نقول إنّ العدد الناطق $\frac{-4}{+3}$ هو حاصل **القسمة التام** للعدد الصحيح (− 4) على العدد الصحيح (+ 3) .

• كل من حواصل القسمة (+ 5) ، 3,8 ، $\frac{5}{7}$ الواردة في المسائل السابقة هو عدد ناطق .

نستخلص مما سبق أن حاصل القسمة التام لعدد صحيح ا على عدد صحيح غير معدوم ب هو عدد ناطق ح يكتب على الشكل $\frac{ا}{ب}$ أي ح = $\frac{ا}{ب}$

تعريف :

العدد الناطق هو حاصل القسمة التام لعدد صحيح على عدد صحيح غير معدوم .

اصطلاح :

تَعْلَمُ أنه إذا كان ا ، ب عددين طبيعيين ، حيث ب ≠ 0

فالكتابة $\frac{ا}{ب}$ تدل على كسر بسطه ا ومقامه ب .

بصفة عامة :

إذا كان ا ، ب عددين صحيحين ، حيث ب ≠ 0 ، فالكتابة $\frac{ا}{ب}$ تسمى كسرا بسطه ا ومقامه ب .

أ ، ب عددان صحيحيان .

1) الكتابة $\frac{أ}{ب}$ تدل إما على كسر وإما على عدد ناطق .

2) كل عدد صحيح ب هو عدد ناطق لأن ب $= \frac{ب}{1}$

إذن ص ⊃ ك ونعلم أن ط ⊃ ص .

نستنتج أن **ط ⊃ ص ⊃ ك**

1) عيّن أربع ثنائيات مرتبة (أ ، ب) من ص × ص* ، بحيث يكون (– 7) هو حاصل القسمة التام للعدد أ على العدد ب .

2) اكتب كلاًّ من الأعداد الآتية على الشكل $\frac{أ}{ب}$ ، حيث :

أ ∈ ص ، ب ∈ ص* : – 21 ، + 6 ، 1,5 ، 0,7 ، – 5,95 .

2. العدد الناطق الموجب والعدد الناطق السالب :

تعريف :

• يكون العدد الناطق $\frac{أ}{ب}$ موجبا إذا كان العددان الصحيحان أ ، ب من نفس الإشارة .

• يكون العدد الناطق $\frac{أ}{ب}$ سالبًا إذا كان العددان الصحيحان أ ، ب مختلفين في الإشارة .

• يكون العدد الناطق $\frac{أ}{ب}$ **معدوما** إذا كان العدد الصحيح أ معدومًا .

مثال :

– كل من $\frac{15}{7}$ ، $\frac{+3}{+5}$ ، $\frac{-9}{3}$ ، $\frac{7}{10}$ هو عدد ناطق موجب .

– كل من $\frac{-8}{+3}$ ، $\frac{+8}{3}$ ، $\frac{+3}{7}$ ، $\frac{6}{7}$ هو عدد ناطق سالب .

• نرمز لمجموعة الأعداد الناطقة الموجبة أو المعدومة بالرمز ك+ ،

ولمجموعة الأعداد الناطقة السالبة أو المعدومة بالرمز ك .

ويكون ك+ ∪ ك = ك ؛ ك+ ∩ ك = {0} .

ونرمز لمجموعة الأعداد الناطقة غير المعدومة بالرمز ك*

3. القيمة المطلقة لعدد ناطق :

تعريف :

القيمة المطلقة للعدد الناطق $\frac{أ}{ب}$ ، ونرمز لها بالرمز $\left|\frac{أ}{ب}\right|$ هي العدد الناطق الموجب $\frac{|أ|}{|ب|}$.

أمثلة :

$\left|\frac{15}{7}\right| = \frac{15}{7}$ ؛ $\left|\frac{+9}{+5}\right| = \frac{|+9|}{|+5|} = \frac{9}{5}$ ؛ $\frac{|15|}{|-7|} = \frac{15}{7}$ ؛

$\left|\frac{+8}{3}\right| = \frac{|+8|}{|-3|} = \frac{8}{3}$ ؛ $\left|\frac{-8}{+3}\right| = \frac{|-8|}{|+3|} = \frac{8}{3}$.

• لاحظ أن القيمة المطلقة لعدد ناطق هي عدد كسري .

نستنتج من ذلك أن العدد الكسري هو عدد ناطق موجب أو معدوم .

وهذا يعني أن مجموعة الأعداد الكسرية ك هي جزء من المجموعة ك

أي ك ⊂ ك .

4. الأعداد الناطقة المتساوية :

ا) تساوي عددين ناطقين

تعريف :

> يكون العددان الناطقان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ متساويين إذا كان أ . ء = ب . جـ

أمثلة : $\frac{-4}{5} = \frac{8}{-10}$ لأن $(-4) \times (-10) = 5 \times 8$.

$\frac{-22}{-6} \neq \frac{-7}{-2}$ لأن $(-22) \times (-2) \neq (-6) \times (-7)$.

• هل العددان الناطقان $\frac{3}{-4}$ ، $\frac{-5}{6}$ متساويان ؟

• هل العددان الناطقان $\frac{8}{5}$ ، $\frac{-40}{-25}$ متساويان ؟

ب) الكسور التي تمثل نفس العدد الناطق :

مثال 1 : لدينا $\frac{+15}{+3} = +5$ و $\frac{-15}{-3} = +5$

وأيضا $\frac{+30}{+6}=+5$ ؛ $\frac{-30}{-6}=+5$ ؛ $\frac{+5}{+1}=+5$ ، $\frac{-5}{-1}=+5$ ؛ .....

نقول إن الكسور $\frac{+15}{+3}$ ، $\frac{-15}{-3}$ ، $\frac{+30}{+6}$ ، $\frac{-30}{-6}$ ، $\frac{+5}{+1}$ ، $\frac{-5}{-1}$ ، ..... تمثل نفس العدد الناطق $+5$ الذي هو حاصل القسمة التام للبسط على المقام ، ونرمز له أيضا بأحد الكسور السابقة .

مثال 2 : $\frac{+5}{-10}=\frac{-25}{+50}=\frac{+1}{-2}=\frac{-10}{+20}=.....$

الكسور $\frac{+5}{-10}$ ، $\frac{-25}{+50}$ ، $\frac{+1}{-2}$ ، ..... تمثل نفس العدد الناطق السالب الذي نرمز له **مثلا** بالرمز $-\frac{1}{2}$.

اصطلاح : أ ، ب عددان صحيحان .

إذا كان العدد الناطق $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ موجبا نكتب : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=+\frac{|\text{أ}|}{|\text{ب}|}$.

وإذا كان سالبا نكتب : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=-\frac{|\text{أ}|}{|\text{ب}|}$.

أمثلة :

$\frac{-5}{-7}=+\frac{|-5|}{|-7|}=+\frac{5}{7}$ ؛ $\frac{+27}{+18}=+\frac{|+27|}{|+18|}=+\frac{27}{18}$

$\frac{-15}{+27} = -\frac{|-15|}{|+27|} = -\frac{15}{27}$ ؛ $\frac{+3}{-4} = -\frac{|+3|}{|-4|} = -\frac{3}{4}$

• الكتابة $+\frac{27}{18}$ هي الكتابة المبسطة لكل من العددين الناطقين $\frac{+27}{-18}$ و $\frac{-27}{-18}$.

• الكتابة $-\frac{3}{4}$ هي الكتابة المبسطة لكل من العددين الناطقين $\frac{+3}{-4}$ و $\frac{-3}{+4}$.

أمثلة : $\frac{-3}{-5} = \frac{+3}{+5} = +\frac{3}{5}$ ؛ $-\frac{3}{2} = \frac{-3}{2} = \frac{3}{-2}$.

$\frac{+4}{-7} = \frac{-4}{+7} = -\frac{4}{7}$ ؛ $+\frac{3}{4} = \frac{-3}{-4} = \frac{+3}{+4}$.

1) عيّن الأعداد الناطقة الموجبة والأعداد الناطقة السالبة مما يلي :

$\frac{+5}{-3}$ ، $\frac{-4}{+5}$ ، $\frac{+9}{+3}$ ، $\frac{-6}{+2}$ ، $\frac{-7}{-11}$ ، $\frac{+7}{+2}$ ، $\frac{3}{-1}$ ، 5 .

2) بسط الكتابات الآتية :

$\frac{-2}{-3}$ ، $\frac{-12}{+5}$ ، $\frac{+7}{+6}$ ، $\frac{+8}{-3}$ ، $\frac{-6}{+9}$.

ملاحظة : تعلم أن ص$^+$ = ط ؛ أي أنّ كل عدد صحيح موجب هو عدد طبيعي .

فيكون مثلاً $\frac{+3}{+8} = \frac{3}{8} = +\frac{3}{8}$ ؛ $\frac{-7}{+5} = \frac{-7}{5} = -\frac{7}{5}$ ؛

$\frac{+9}{-4} = \frac{9}{-4} = -\frac{9}{4}$

• إليك الجدول الآتي :

العدد الناطق	بعض الكسور التي تمثله
6	$\frac{6}{1}$ ، $\frac{-6}{-1}$ ، $\frac{12}{2}$ ، $\frac{-36}{-6}$ ، $\frac{72}{12}$ ، .....
-3	$\frac{-3}{1}$ ، $\frac{15}{-5}$ ، $\frac{+3}{-1}$ ، $\frac{-18}{6}$ ، $\frac{30}{-10}$ ، .....
$2,8$	$\frac{28}{10}$ ، $\frac{-280}{-100}$ ، $\frac{14}{5}$ ، $\frac{-140}{-50}$ ، .....
$+\frac{5}{7}$	$\frac{+5}{+7}$ ، $\frac{-5}{-7}$ ، $\frac{15}{21}$ ، $\frac{10}{14}$ ، $\frac{-45}{-63}$ ، .....
$\frac{4}{6}$	$\frac{-24}{-36}$ ، $\frac{-2}{-3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، ......

لاحظ أنّ $\frac{-5}{7} = \frac{-10}{14} = \frac{-15}{21} = \frac{-25}{+35} = \frac{-45}{+63}$ أي :

$$\frac{-5}{7} = \frac{2 \times (-5)}{2 \times 7} = \frac{3 \times (-5)}{3 \times 7} = \frac{(-5) \times (-5)}{(-5) \times 7} = \frac{(-9) \times (-5)}{(-9) \times 7}$$

أ ، ب ، د أعداد صحيحة ، حيث ب $\neq 0$ و د $\neq 0$.

الكسران $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{أ.د}{ب.د}$ يمثلان نفس العدد الناطق ، أي $\frac{أ}{ب} = \frac{أ.د}{ب.د}$

5. اختزال الكسور :

لاحظ أن الكسرين $\frac{+45}{-63}$ و $\frac{-15}{21}$ يمثلان نفس العدد الناطق أي $\frac{+45}{-63} = \frac{-15}{21}$

لدينا أيضا $\frac{+45}{-63} = \frac{(-15)\times(\quad)}{21\times(\quad)} = \frac{-15}{21}$ حسب النتيجة السابقة .

نقول إننا **اختزلنا** الكسر $\frac{+45}{-63}$

أ ، ب عددان صحيحان . حيث ب $\neq 0$.

اختزالُ الكسر $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ هو إيجاد كسر $\frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ ، بحيث :

- **$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ و $\frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ يمثلان نفس العدد الناطق أي $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$.**

و

- $|\text{جـ}| < |\text{أ}|$ **و** $|\text{ء}| < |\text{ب}|$.

مثال : لنختزل الكسر $\frac{-15}{21}$

$$\frac{-15}{21} = \frac{3\times(-5)}{3\times 7} = \frac{-5}{7}$$

ورأيت أنّ $\frac{+45}{-63} = \frac{-15}{21}$. إذن $\frac{+45}{-63} = \frac{-15}{21} = \frac{-5}{7}$.

يمكن أن نكتب أيضا $\frac{+45}{-63} = \frac{(-9)\times(-5)}{(-9)\times 7} = \frac{-5}{7}$.

إنَّ القيمة المطلقة $|-9|$ أي 9 هي القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $|+45|$ و $|-63|$ أي 45 و 63

الكسر $\frac{-5}{+7}$ **غير قابل للاختزال** لأن العددين الطبيعيين 5 ، 7 أوليان فيما بينهما .

تعريف :

ا ، ب عددان صحيحان ، حيث ب $\neq 0$.

الكسر $\frac{ا}{ب}$ غير قابل للاختزال **يعني** أن العددين الطبيعيين |ا| و |ب| أوليان فيما بينهما .

لكتابة عدد ناطق يُستَحْسَنُ اختيار الممثل غير القابل للاختزال الذي مقامه موجب .

أمثلة :

$\frac{-9}{+15} = \frac{-3}{+5} = -\frac{3}{5}$ ؛ $\frac{16}{-24} = \frac{-2}{+3} = -\frac{2}{3}$.

1) اختزل كلاًّ من الكسور الآتية :

$\frac{-35}{55}$ ، $\frac{54}{90}$ ، $\frac{88}{-36}$ ، $\frac{135}{-25}$ ، $\frac{-72}{-144}$.

2) ما هي الكسور غير القابلة للاختزال من بين الكسور الآتية ؟

$\frac{3}{12}$ ، $\frac{-19}{9}$ ، $\frac{-39}{-26}$ ، $\frac{-39}{-27}$ ، $\frac{37}{49}$ ، $\frac{3\times 5^2\times 7}{13\times 2^3}$ ، $\frac{7\times 5^2\times 3}{6\times 2\times 11}$.

6. توحيد مقامات الكسور :

مثال 1 :

لنوحد مقامي الكسرين $\frac{-3}{4}$ ، $\frac{5}{-7}$.

لاحظ أن $\frac{5}{-7}=\frac{-5}{7}$.

وأنّ مقام كل من $\frac{-3}{4}$ ، $\frac{-5}{7}$ موجب .

لدينا $\frac{-3}{4}=\frac{(-3)\times 7}{4\times 7}=\frac{-21}{28}$

و $\frac{-5}{7}=\frac{(-5)\times 4}{7\times 4}=\frac{-20}{28}$

للكسرين $\frac{-21}{28}$ ، $\frac{-20}{28}$ نفس المقام .

لاحظ أن العدد الطبيعي 28 هو **المضاعف المشترك الأصغر** للعددين الطبيعيين 4 ، 7 .

أي م م أ (4 ، 7) = 28 .

مثال 2 :

لِنُوَحِّدْ مقامي الكسرين $\frac{7}{-24}$ ، $\frac{-8}{-12}$.

يُمكن أن نكتب : $\frac{7}{-24} = \frac{-7}{24}$ و $\frac{-8}{-12} = \frac{8}{12}$.

وأيضا $\frac{8}{12} = \frac{8 \times 2}{12 \times 2} = \frac{16}{24}$

لاحظ أن : $\frac{-7}{24}$ ، $\frac{16}{24}$ لهما نفس المقام .

وأن 24 = م م أ (24 ، 12) .

مثال 3 :

لنوحِّدْ مقامي الكسرين $\frac{15}{-9}$ ، $\frac{-25}{75}$.

لدينا $\frac{15}{9} \quad \frac{15}{9}$

نلاحظ في هذا المثال أننا نحصل على كسرين لهما نفس المقام إذا اختزلنا كلاًّ منهما .

أي $\frac{15}{9} = \frac{5 \times 3}{3 \times 3} = \frac{5}{3}$ ، $\frac{-25}{75} = \frac{(-1) \times 25}{3 \times 25} = \frac{-1}{3}$.

الكسران $\frac{5}{3}$ و $\frac{-1}{3}$ لهما نفس المقام .

مثال 4 :

لنوحِّدْ مقامات الكسور $\frac{5}{-9}$ ، $\frac{-14}{-16}$ ، $\frac{-15}{12}$.

لدينا: $\frac{5}{-9} = \frac{-5}{9}$ ؛ $\frac{-14}{-16} = \frac{14}{16}$.

في هذا المثال يمكن اختزال الكسرين $\frac{14}{16}$ و $\frac{-15}{12}$ وذلك قبل البحث عن مقام مشترك للكسور $\frac{-5}{9}$ ، $\frac{14}{16}$ ، $\frac{-15}{12}$.

$$\frac{14}{16} = \frac{7\times 2}{8\times 2} = \frac{7}{8} \quad ; \quad \frac{-15}{12} = \frac{(-5)\times 3}{4\times 3} = \frac{-5}{4} .$$

يستحسن اختيار المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 9 ، 8 ، 4 كمقام مشترك للكسور $\frac{-5}{9}$ ، $\frac{7}{8}$ ، $\frac{-5}{4}$ وهو 72 .

يكون $\frac{-5}{9} = \frac{(-5)\times 8}{9\times 8} = \frac{-40}{72}$ ، $\frac{7}{8} = \frac{7\times 9}{8\times 9} = \frac{63}{72}$ ،

$$\frac{-5}{4} = \frac{(-5)\times 18}{4\times 18} = \frac{-90}{72}$$

الكسور $\frac{-40}{72}$ ، $\frac{63}{72}$ ، $\frac{-90}{72}$ لها نفس المقام

مثال 5 :

لنوحد مقامات الكسور $\frac{-15}{18}$ ، $\frac{49}{35}$ ، $\frac{7}{1}$.

لدينا :

$\frac{-15}{18} = \frac{(-5)\times 3}{6\times 3} = \frac{-5}{6}$ ؛ $\frac{49}{35} = \frac{7\times 7}{5\times 7} = \frac{7}{5}$.

م م أ (6 ، 5 ، 1) = م م أ (6 ، 5) = 30 .

فيكون $\frac{-5}{6} = \frac{(-5)\times 5}{6\times 5} = \frac{-25}{30}$ ؛ $\frac{7}{5} = \frac{7\times 6}{5\times 6} = \frac{42}{30}$ ؛

$\frac{7}{1} = \frac{7\times 30}{1\times 30} = \frac{210}{30}$.

إن الكسور $\frac{-25}{30}$ ، $\frac{42}{30}$ ، $\frac{210}{30}$ لها نفس المقام .

1) وحِّدْ المقامات ، في كل من الحالات الآتية :

أ) $\frac{-13}{7}$ و $\frac{17}{-28}$ ، ب) $\frac{-15}{12}$ و $\frac{-21}{48}$.

جـ) $\frac{15}{-9}$ و $\frac{38}{16}$ ، د) $\frac{-7}{-24}$ و $\frac{10}{-18}$.

2) وحِّدْ المقامات ، بأبسط طريقة في كل من الحالات الآتية :

أ) $\frac{11}{-5}$ و $\frac{36}{60}$ ، ب) $\frac{7}{-8}$ و $\frac{-3}{-4}$ و $\frac{5}{-12}$.

جـ) $\frac{36}{4}$ و $\frac{-17}{8}$ و $\frac{13}{-1}$ ، د) $\frac{-10}{5}$ و $\frac{9}{-3}$ و $\frac{-8}{-1}$.

7. مجموعة الأعداد العشرية :

إليك الكسور $\frac{-37}{10}$ ، $\frac{171}{100}$ ، $\frac{-273}{1000}$.

لاحظ أن $\frac{-37}{10} = \frac{-37}{10^1}$ ؛ $\frac{171}{100} = \frac{171}{10^2}$ ؛ $\frac{-273}{1000} = \frac{-273}{10^3}$

- إن مقام كل منها قوة للعدد 10 .
- كل من هذه الكسور يسمى **كسرا عشريًا** .
- كل من الأعداد الناطقة $\frac{-37}{10}$ ، $\frac{171}{100}$ ، $\frac{-273}{1000}$ يسمى **عددًا عشريًا**

تعريف :

العدد العشري هو عدد ناطق أحد ممثليه كسر عشري

نرمز لمجموعة الأعداد الناطقة العشرية بالرمز ع .

ويكون ع $\subset$ ك .

ملاحظات :

1) $\frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{5 \times 2} = \frac{15}{10}$ و $\frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{2 \times 5} = \frac{14}{10}$.

فكل من العددين الناطقين $\frac{3}{2}$ ، $\frac{7}{5}$ هو عدد عشري .

- $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ فالعدد $\frac{3}{4}$ هو عدد عشري . 2)

• كل من الأعداد الناطقة $\frac{1}{8}$ ، $-\frac{3}{25}$ ، $-\frac{7}{20}$ هو عدد عشري لأن :

$\frac{1}{8} = \frac{1 \times 125}{8 \times 125} = \frac{125}{1000}$ ؛ $-\frac{3}{25} = -\frac{12}{100}$ ؛ $-\frac{7}{20} = -\frac{35}{100}$.

لاحظ أن $8 = 2^3$ ؛ $25 = 5^2$ ، $20 = 2^2 \times 5$.

هذا يعني أن تحليل مقام كل من الكسور $\frac{1}{8}$ ، $\frac{-3}{25}$ ، $\frac{-7}{20}$ إلى جداء عوامل أولية لا يظهر فيه إلا العاملان 2 أو 5 .

2) $-5 = \frac{-5}{1} = -\frac{50}{10}$ أي -5 هو عدد عشري .

بصفة عامة :

كل عدد صحيح هو عدد عشري

أي **ص ⊂ ع**

وبما أن ط ⊂ ص و ص ⊂ ع و ع ⊂ ك .

فإن **ط ⊂ ص ⊂ ع ⊂ ك**

نتيجة :

يكون العدد الناطق س عشريًا إذا أمكن تمثيله بكسر من الشكل :

$\frac{\text{ا}}{2^{\text{ن}} \times 5^{\text{هـ}}}$ ؛ حيث ا عدد صحيح و ن ، هـ عددان طبيعيان .

كتابة العدد العشري (الكتابة بالفاصلة) :

نعلم أن $\frac{975}{100}$ هو عدد عشري ويكتب على شكل 9.75 .

أي $\frac{975}{100} = 9.75$.

نستنتج من ذلك أن كل عدد ناطق عشري يمكن كتابته بالفاصلة كما في الأمثلة الآتية :

$\frac{17}{10} = 1.7$ ؛ $\frac{17}{100} = 0.17$ ، $\frac{17}{1000} = 0.017$

$\frac{125}{10} = 12.5$ ؛ $\frac{125}{100} = 1.25$ ؛ $\frac{125}{1000} = 0.125$

$\frac{+17}{-100} = -\frac{17}{100} = -0.17$ ؛ $\frac{-125}{-10} = \frac{125}{10} = 12.5$.

$\frac{-39}{-1000} = +\frac{39}{1000} = +0.039$.

تذكر ...

• لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين غير معدومين أو لعدة أعداد طبيعية غير معدومة ، نتبع ما يلي :

★ نحلّل كلّا من هذه الأعداد إلى جداء عوامل أولية .

★ نحسب جداء العوامل المشتركة وغير المشتركة على أن نأخذ كل عامل مرّة واحدة وبأكبر أس .

• لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين أو لعدّة أعداد طبيعية غير معدومة ، نتبع ما يلي :

★ نحلّل كلا من هذه الأعداد إلى جداء عوامل أولية .

★ نحسب جداء العوامل المشتركة على أن نأخذ كل عامل مرّة واحدة وبأصغر أس .

مثال

ا $= 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$.

ب $= 5292 = 2^2 \times 3^3 \times 7^2$.

حـ $= 4200 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$.

م م أ (720 ، 5292 ، 4200) $= 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 = 529200$

ق م أ (720 ، 5292 ، 4200) $= 2^2 \times 3 = 12$.

يكون العددان الطبيعيان ا ، ب أوليين فيما بينهما إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1

مثال

ا $= 440 = 2^3 \times 5 \times 11$ ، ب $= 819 = 3^2 \times 7 \times 13$.

ق م أ (440 ، 819) $= 1$ إذن 440 ، 819 أوليان فيما بينهما

التمارين

1. أوجد في كل حالة ، حاصل القسمة التام للعدد الصحيح ا على العدد الصحيح ب .
ا = − 28 و ب = 4 ؛ ا = 28 و ب = − 4 ؛ ا = − 51 و ب = − 17 ؛
ا = 39 و ب = − 13 ؛ ا = − 38 و ب = − 6 ؛ ا = + 30 و ب = − 30 .

2. عيّن ، في كل حالة من الحالات الآتية ، حاصل القسمة التام للعدد الصحيح ا على العدد الصحيح ب .
ا = 76 و ب = − 19 ؛ ا = − 105 و ب = − 35 ؛ ا = 162 و ب = 18 ؛
ا = − 13 و ب = − 1 ؛ ا = 0 و ب = − 20 ؛ ا = − 1 و ب = + 1 .

3. اكمل باستعمال أحد الرمزين ∋ ، ∌ كلا مما يلي :
$\frac{-3}{4}$ ... ك$^{+}$ ؛ 7 ... ك$^{+}$ ؛ $\frac{4}{5}$ ... ك$^{-}$ ؛ − 1 ... ك$^{+}$ ؛
1 ... ك ؛ 0 ... ك$^{+}$ ؛ 0 ... ك$^{-}$ ؛ − 5,6 ... ك$^{+}$ ؛
− 7,18 ... ك$^{-}$ ؛ − 3 ... ط ؛ − 3 ... ص ؛ 3,14 ... ط .

4. اكمل باستعمال أحد الرمزين ⊃ ، ⊅ كلا مما يلي :
ص ... ط ؛ ط ... ك ؛ ك$^{-}$ ... ك$^{+}$ ؛ ص ... ط ؛
ص ... ك$^{+}$ ؛ ص$^{-}$ ... ك ؛ ص ... ك$^{-}$ ؛ ط ... ك .

5. أوجد القيمة المطلقة لكل من الأعداد الناطقة التالية :
$-\frac{15}{7}$ ؛ $\frac{9}{11}$ ؛ $\frac{23}{-45}$ ؛ $\frac{-15}{-7}$ ، − 17 .

6. تحقق من أن الأعداد الناطقة التالية هي أعداد متساوية :
$\frac{32}{-56}$ ؛ $\frac{-20}{35}$ ؛ $\frac{-32-20}{56+35}$ ، $\frac{32+20}{-56-35}$.

7. 1) أوجد ـ بالنسبة لكل كسر من الكسور الآتية ـ الكسر غير القابل للاختزال الذي يمثل نفس العدد الناطق

$\frac{-14}{42}$ ، $\frac{-16}{-48}$ ؛ $\frac{27}{-48}$ ؛ $\frac{108}{60}$ ؛ $\frac{-96}{-288}$ ؛ $\frac{-36}{+20}$.

2) ما هي الكسور الواردة في السؤال الأول التي تمثل نفس العدد الناطق ؟

8. اختزل كلاً من الكسور الآتية .

$\frac{(-7)(-25)}{(-15)(-21)}$ ؛ $\frac{16\times(-15)(-6)}{2\times 65\times(-63)}$ ، $\frac{(-14)\times 9\times(-30)}{(-27)(-10)\times 42}$ ؛

$\frac{(-45)\,\text{س}}{15\,\text{س}\,\text{ع}}$ ؛ $\frac{5\,\text{س}^2(-\text{ع})}{(-15)(-\text{س})\,.\,\text{ع}}$ ؛ $\frac{2\times 3\times(-\text{س})\times\text{ع}^2}{(-12)\,\text{س}^2\times\text{ع}}$.

(حيث س و ع عددان صحيحان غير معدومين) .

9. عيّن ـ من بين الكسور الآتية ـ الكسور غير القابلة للاختزال .

$\frac{7+2}{7}$ ؛ $\frac{12+2}{12}$ ؛ $\frac{4+11}{11}$ ؛ $\frac{3+12}{12}$ ؛ $\frac{25-5}{25}$

$\frac{-34+17}{34}$ ؛ $\frac{26-5}{26}$.

10. وحّد مقامات الكسور الآتية :

1) $\frac{7}{-15}$ و $\frac{-5}{12}$ ؛ $\frac{-2}{5}$ و $\frac{-5}{18}$ ؛ $\frac{39}{-7}$ و $\frac{13}{12}$ ؛ $\frac{12}{-15}$ و $\frac{3}{-4}$.

2) $\frac{-3}{4}$ و $\frac{-7}{-8}$ ؛ $\frac{33}{-15}$ و $\frac{-3}{6}$ و $\frac{4}{-12}$ ؛ $\frac{2}{-10}$ و $\frac{-3}{12}$ و $\frac{-12}{-9}$.

11. وحّد مقامات الكسور الآتية :

$\frac{-2}{3}$ و $\frac{3}{-4}$ و $\frac{1}{5}$ ؛ $\frac{4}{-3}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{-7}{12}$ ؛ $\frac{5}{-12}$ و $\frac{-7}{18}$ و $\frac{3}{-50}$ ؛

$\frac{-2}{3}$ و $\frac{3}{-4}$ و -5 ؛ $\frac{7}{3}$ و -4 و 5 ؛ $\frac{5}{2}$ و 3 و $\frac{1}{6}$.

12. أوجد الكسر غير القابل للإختزال بالنسبة لكل كسر من الكسور الآتية ، ثم وحّد مقامات الكسور الناتجة في كل حالة .

1) $\frac{-63}{27}$ ، $\frac{-75}{-125}$ ، $\frac{42}{-126}$. 2) $\frac{-91}{-840}$ ، $\frac{-126}{630}$ ، $\frac{574}{-369}$ ، $\frac{-884}{-735}$.

3) $\frac{42}{-54}$ ، $\frac{-135}{90}$ ، $\frac{24}{36}$ ، $\frac{27}{18}$. 4) $\frac{15}{27}$ ، $\frac{18}{45}$ ، $\frac{32}{48}$ ، $\frac{35}{105}$.

13. 1) عيّن الكسور العشرية ، من بين الكسور الآتية :

$\frac{-3}{8}$ ، $\frac{7}{-20}$ ، $\frac{-10}{-10}$ ، $\frac{-24}{60}$ ، $\frac{27}{100}$ ، $\frac{15}{-12}$ ، $\frac{741}{300}$.

2) عيّن الأعداد العشرية من بين الأعداد الناطقة الآتية :

$\frac{20}{120}$ ، $\frac{49}{64}$ ، $\frac{-111}{250}$ ، $\frac{123}{300}$ ، $\frac{69}{80}$ ، $\frac{7}{22}$ ، $-\frac{713}{750}$.

14. بيّن أن كلاً من الأعداد الناطقة التالية هي أعداد عشرية ؛ ثم اكتب كلا منها على الشكل العشري (أي بالفاصلة) :

$-\frac{29}{8}$ ؛ $\frac{17}{125}$ ، $\frac{422}{2500}$ ، $\frac{534}{160}$ ، $-\frac{19}{400}$ ، $\frac{1023}{640}$.

15. أوجد ـ في كل حالة ـ الأعداد الناطقة س بحيث :

$|س| = \frac{2}{3}$ ؛ $|س| = \left|-\frac{4}{3}\right|$ ، $|س| = -2$.

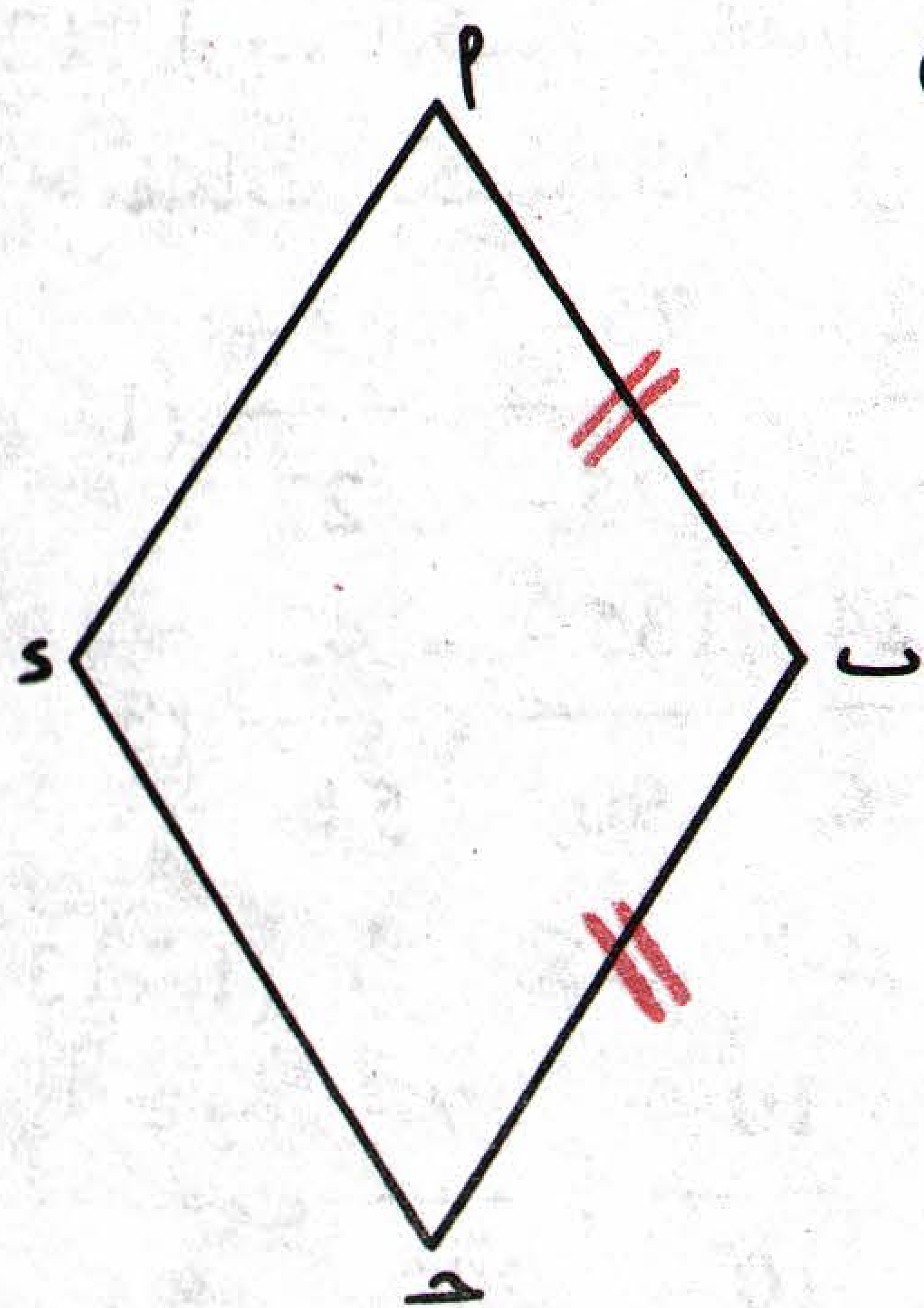
10

متوازيات الأضلاع الخاصة

1. خواص المعين :

مسألة 1 :

ا ب حـ ء معين حيث ا ب = ب حـ (الشكل 18)
لنبرهن أن أضلاعه الأربعة متقايسة .



(الشكل 18)

البرهان :

بما أن ا ب حـ ء معين فهو متوازي أضلاع .
إذن أضلاعه المتقابلة متقايسة .
أي ا ب = ء حـ و ب حـ = ا ء .
لكن ا ب = ب حـ (حسب المعطيات) .
فنستنتج أن : ا ب = ب حـ = ء حـ = ا ء .

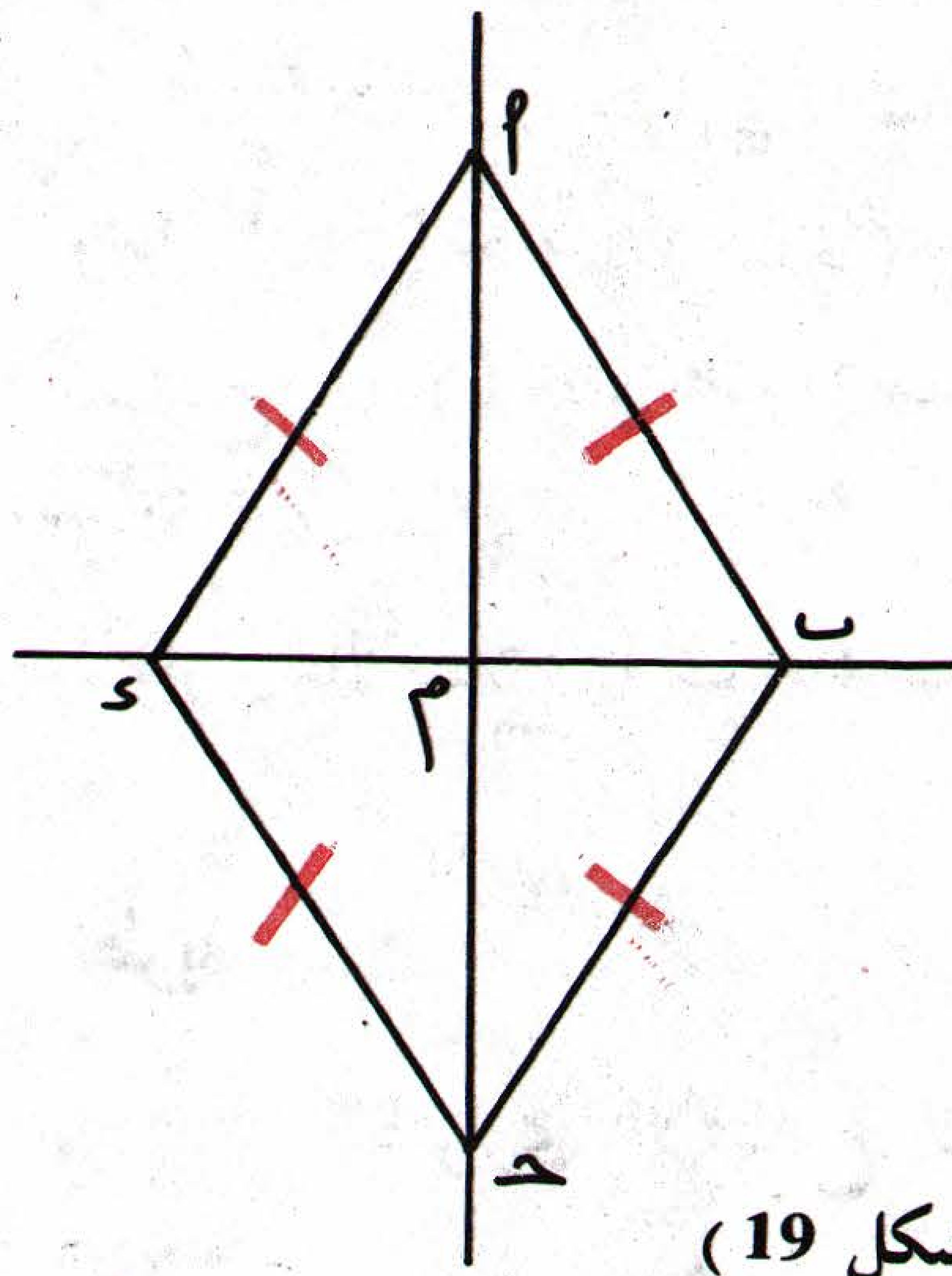
نظرية :

الأضلاع الأربعة للمعين متقايسة .

مسألة 2 :

ا ب حـ ء معين (الشكل 19) .
لنبرهن أن حاملي قطريه [ا حـ] و [ب ء] متعامدان .

البرهان :



(الشكل 19)

- نضع { م } = [أ ح] ∩ [ب ء] .

أ ب = أ ء يعني أن النقطة أ تنتمي إلى محور [ب ء] .

ح ب = ح ء يعني أن النقطة ح تنتمي إلى محور [ب ء] .

فالمستقيم (أ ح) هو محور القطعة [ب ء] .

إذن (أ ح) ⊥ (ب ء) .

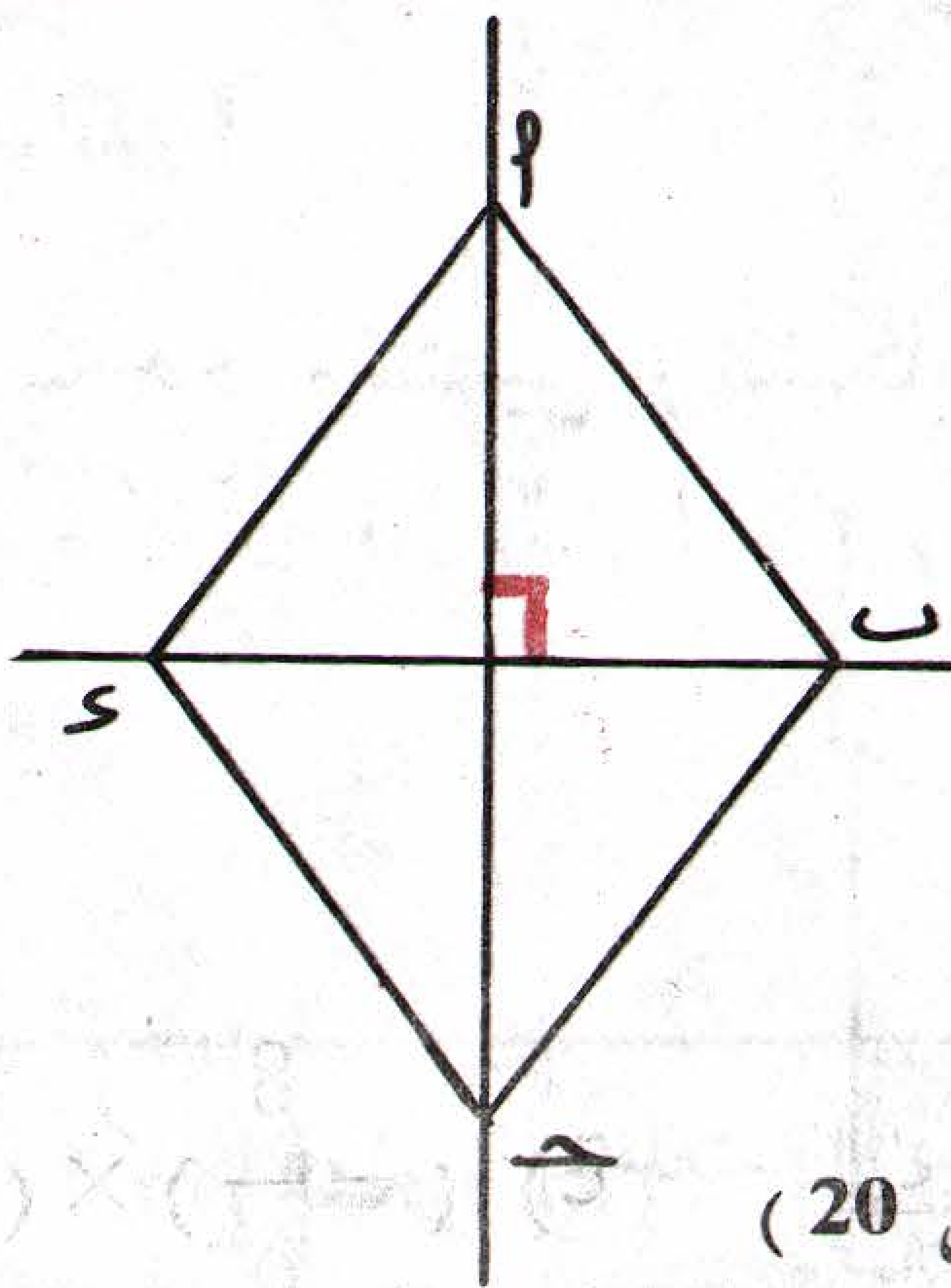
نظرية :

حاملا قطري المعين متعامدان ، وكل منهما هو محور تناظر لهذا المعين .

ملاحظة :

لاحظ أن كلا من المستقيمين (أ ح) ، (ب ء) هو محور تناظر للمعين أ ب ح ء .

مسألة 3 :



(الشكل 20)

أ ب ح ء متوازي أضلاع حيث (أ ح) و (ب ء) متعامدان (الشكل 20) .

لنبرهن أن أ ب ح ء معين .

البرهان :

بما أن ا ب حـ ء متوازي أضلاع ، فالقطران [ا حـ] و [ب ء] لهما نفس المنتصف .
ونعلم أن (ا حـ) ⊥ (ب ء) (حسب المعطيات) .
نستنتج أن (ا حـ) محور [ب ء]
ومنه ا ب = ا ء .
فمتوازي الأضلاع ا ب حـ ء له ضلعان متتاليان متقايسان فهو معين .

نظرية :

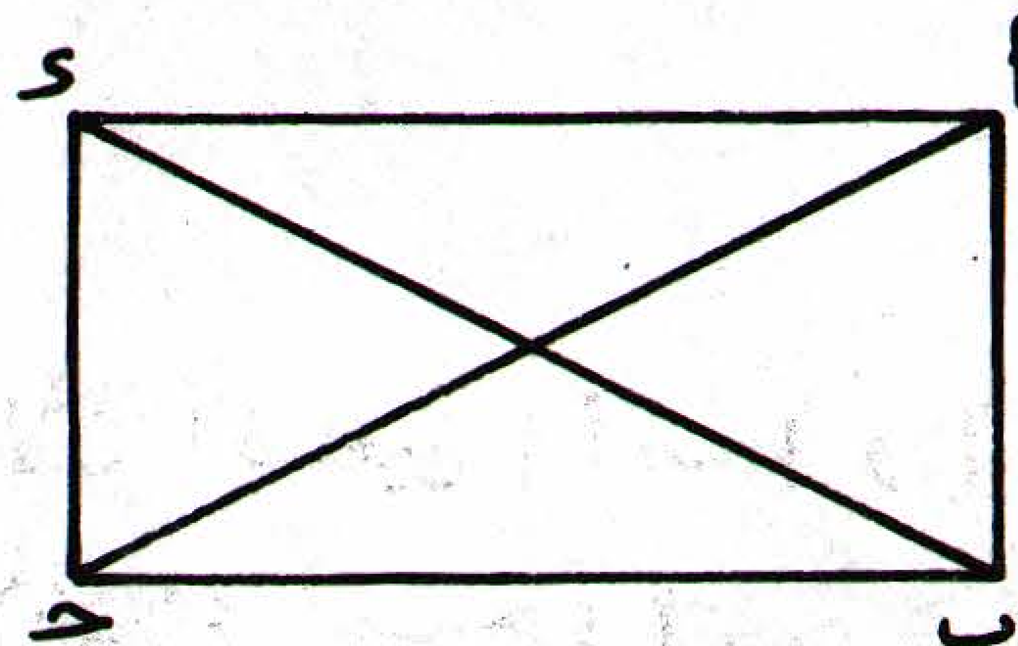
متوازي الأضلاع الذي حاملا قطريه متعامدان هو معين .

ا ب حـ مثلث متقايس الضلعين رأسه الأساسي ا .
عين ء نظيرة ا بالنسبة إلى (ب حـ) .
ـ برهن أن الرباعي ا ب حـ ء معين . واستنتج أن حامل كل قطر له هو منصف للزاويتين المتقابلتين .

2. خواص المستطيل :

مسألة 1 :

ا ب حـ ء مستطيل (الشكل 21) .
لنبرهن أن قطريه [ا حـ] و [ب ء] متقايسان .



(الشكل 21)

البرهان :

المثلثان ا ب حـ ، ب حـ ء متقايسان لأن :

- ا ب حـ = ء حـ ب = 90° .
- [ب حـ] ضلع مشترك
- ا ب = ء حـ (لأن الضلعين [ا ب] ، [ء حـ] متقابلان في المستطيل)

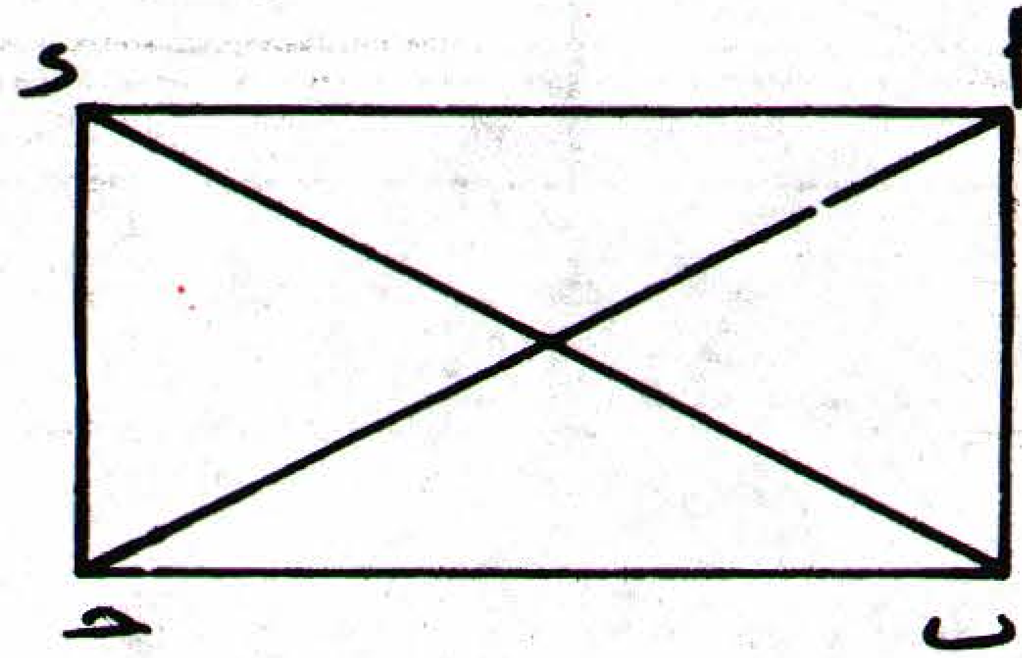
ـ من تقايس هذين المثلثين نستنتج أن ا حـ = ب ء .

نظرية :

قطرا المستطيل متقايسان .

مسألة 2 :

ا ب حـ ء متوازي أضلاع قطراه [ا حـ] و [ب ء] متقايسان (الشكل 22) .
لنبرهن أن ا ب حـ ء مستطيل .



(الشكل 22)

البرهان :

المثلثان ا ب حـ ، حـ ء ب متقايسان لأن :

- [ب حـ] ضلع مشترك
- ا حـ = ب ء (حسب المعطيات)
- ا ب = ء حـ (لأن الضلعين [ا ب] و [ء حـ] متقابلان في متوازي الأضلاع ا ب حـ ء) .

من تقايس هذين المثلثين نستنتج أن $\widehat{\text{أ ب حـ}} = \widehat{\text{د حـ ب}}$

وبما أن $\widehat{\text{أ ب حـ}} + \widehat{\text{د حـ ب}} = 180°$

نستنتج أن $\widehat{\text{أ ب حـ}} = \widehat{\text{د حـ ب}} = 90°$.

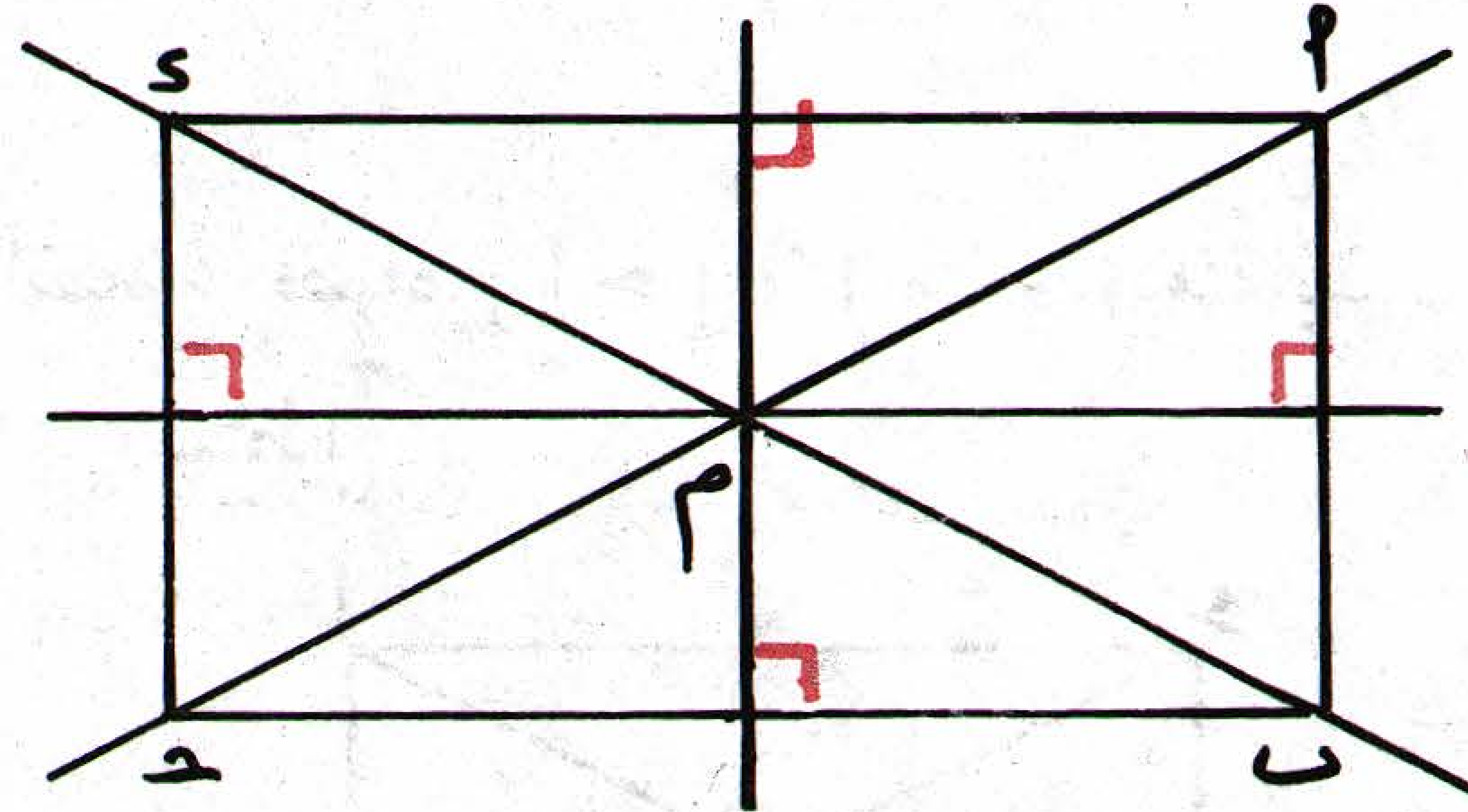
متوازي الأضلاع أ ب حـ د إحدى زواياه قائمة فهو مستطيل .

نظرية :

إذا كان قطرا متوازي أضلاع متقايسين فهو مستطيل .

مسألة 3 :

أ ب حـ د مستطيل ، لنبرهن أن محور أي ضلع منه هو محور تناظر له .



البرهان :

(الشكل 23)

ـ نضع {م} = (أ حـ) ∩ (ب د) (الشكل 23) .

بما أن المستطيل أ ب حـ د هو متوازي أضلاع فقطراه متقايسان ولهما نفس المنتصف .

نستنتج أن م أ = م ب = م حـ = م د .

م أ = م ب يعني أن النقطة م تنتمي إلى محور [أ ب] .

م حـ = م د يعني أن النقطة م تنتمي إلى محور [د حـ] .

أي أن محور الضلع [أ ب] هو محور الضلع [د حـ] .

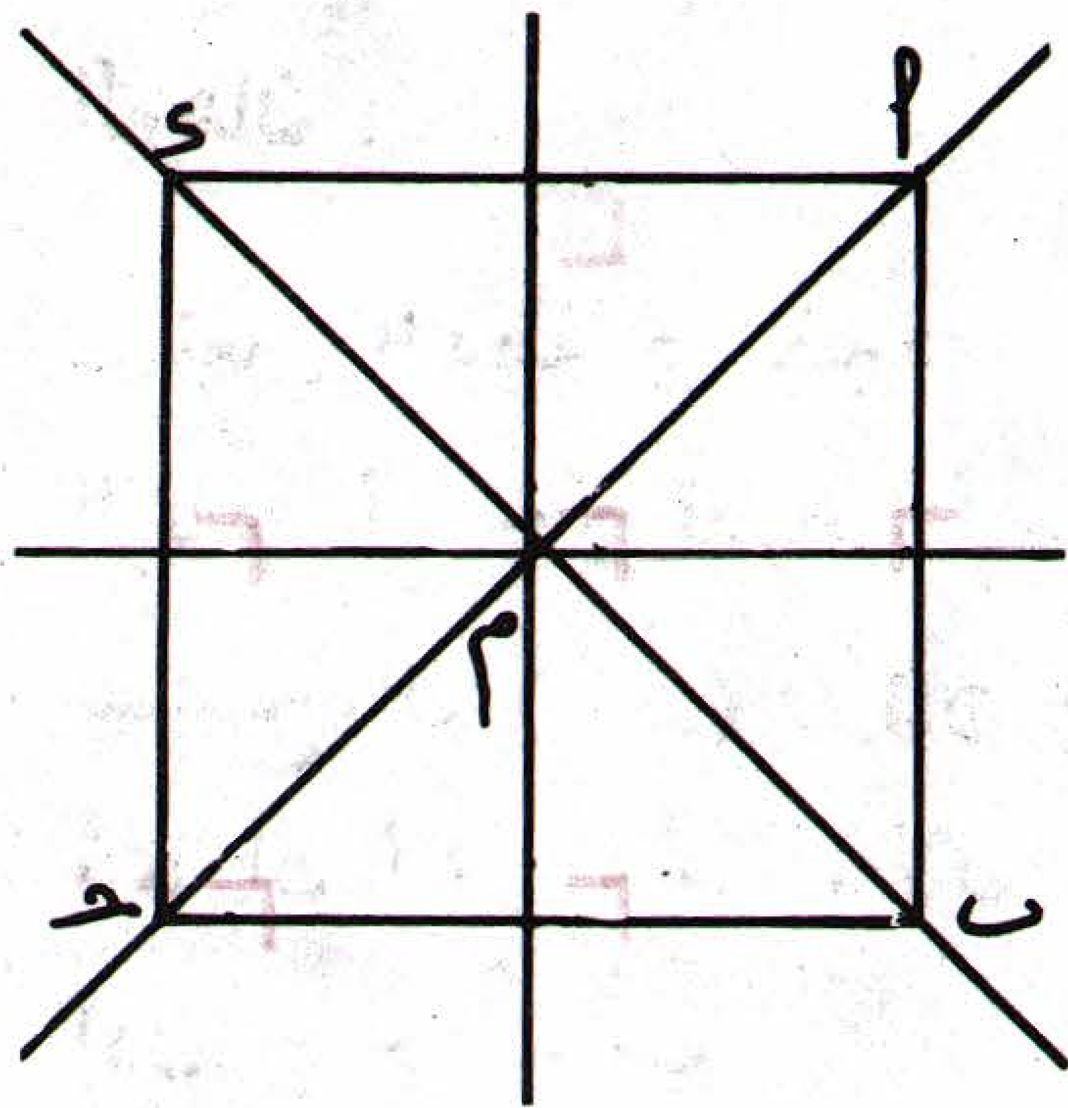
وبنفس الطريقة نبرهن أن محور الضلع [أ د] هو محور الضلع [ب حـ] .

• لاحظ أن نظيرة أي نقطة من المستطيل بالنسبة إلى المحور المشترك للضلعين المتقابلين [أب] و [ءحـ] هي نقطة من هذا المستطيل.
وأن نظيرة أي نقطة من المستطيل بالنسبة إلى المحور المشترك للضلعين المتقابلين [أء] و [بحـ] هي نقطة من هذا المستطيل.

نظرية :

محور أي ضلع في المستطيل هو محور تناظر له.

3. خواص المربع :



(الشكل 24)

رأينا أن المربع هو معين ومستطيل.

• المربع هو متوازي أضلاع، إذن :
نقطة تقاطع قطريه هي مركز تناظر له.

• والمربع هو معين، إذن :
حاملا قطريه متعامدان، وحامل كل قطر هو محور تناظر له.

• المربع هو مستطيل، إذن :
قطراه متقايسان، ومحور أي ضلع هو محور تناظر له.

نظرية :

- **نقطة تقاطع قطري المربع هي مركز تناظر له.**
- **محور أي ضلع من المربع هو محور تناظر له.**
- **حامل أي قطر للمربع هو محور تناظر له.**

4. تطبيقات :

مسألة 1 :

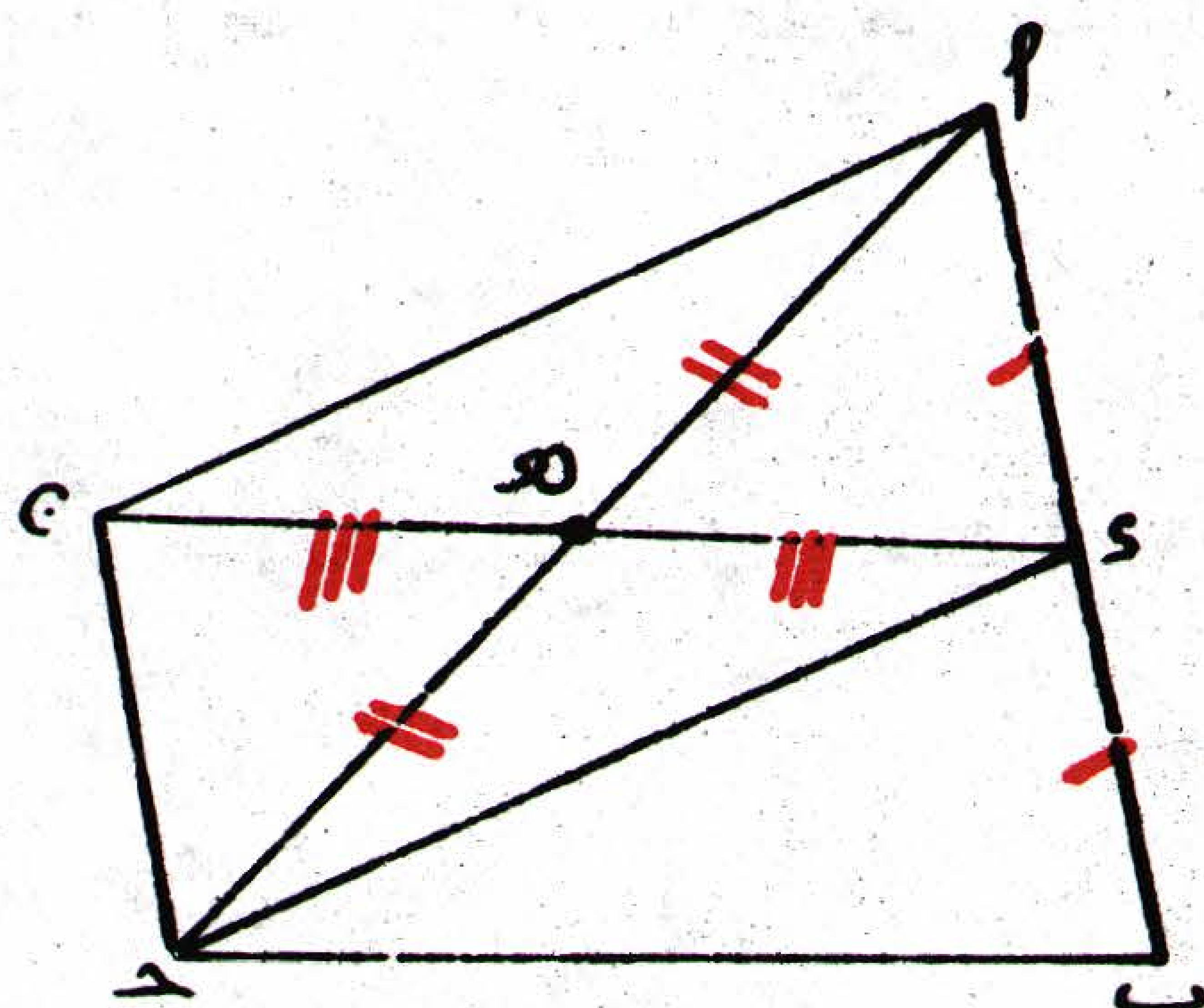
أ ب ج مثلث . د ، هـ هما منتصفا الضلعين [أ ب] و [أ ج] (الشكل 25) .

لنبرهن أن :

• (د هـ) // (ب ج) .

وأن :

• $\text{د هـ} = \frac{1}{2}\ \text{ب ج}$



(الشكل 25)

البرهان :

ـ نعين النقطة و نظيرة د بالنسبة إلى هـ .

الرباعي أ د ج و قطراه [أ ج] و [د و] لهما نفس المنتصف فهو متوازي أضلاع (نظرية) .

نستنتج أن (أ د) // (و ج) و أ د = و ج .

وبما أن أ د = د ب (لأن د منتصف [أ ب]) .

إذن و ج = د ب .

في الرباعي د ب ج و ، الضلعان المتقابلان [د ب] و [و ج] متقايسان وحاملاهما متوازيان .

إذن د ب ج و متوازي أضلاع .

نستنتج أن (د هـ) // (ب ج) وأن د و = ب ج .

وبما أن $\text{د هـ} = \frac{1}{2}\ \text{د و}$

فإن $\text{د هـ} = \frac{1}{2}\ \text{ب ج}$.

نظرية :

حامل القطعة التي طرفاها منتصفا ضلعين في مثلث يوازي حامل الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .

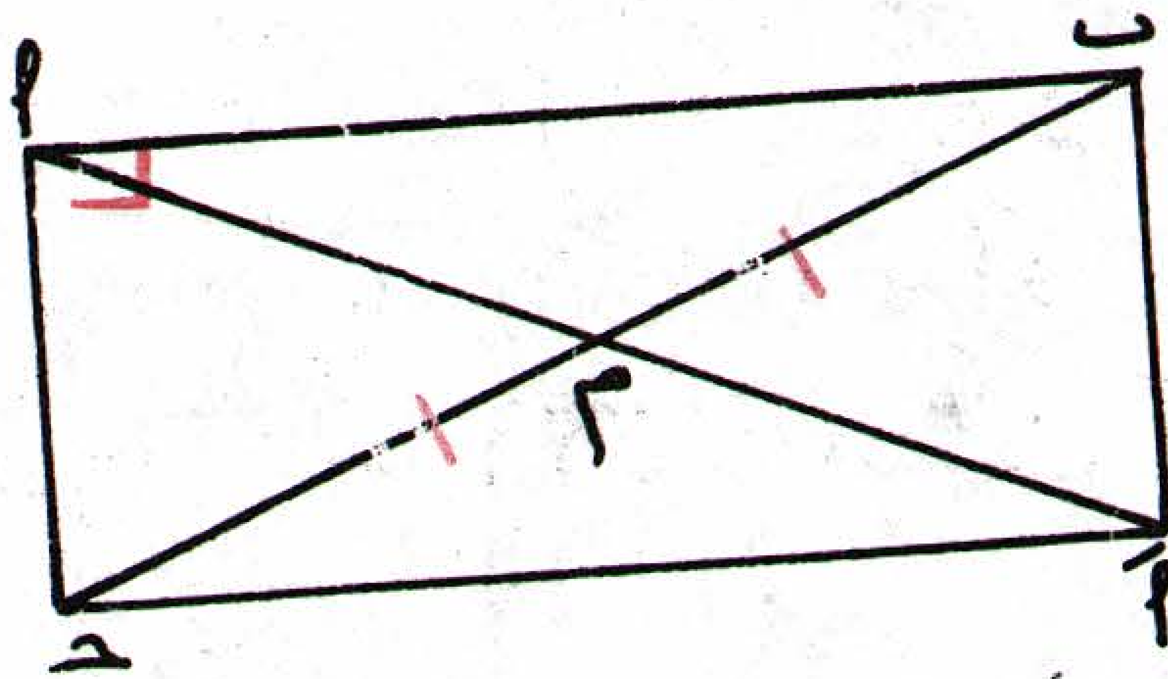
• برهن على النظرية الآتية :

المستقيم الذي يشمل منتصف أحد أضلاع مثلث ويوازي حامل ضلع آخر يشمل منتصف الضلع الثالث .

مسألة 2 :

ا ب حـ مثلث قائم في ا . م منتصف الوتر [ب حـ] .

لنبرهن أن : ا م $= \frac{1}{2}$ ب حـ .



(الشكل 26)

البرهان :

ـ ننشىء ا' نظيرة ا بالنسبة إلى م . نستنتج أن م منتصف [ا ا']. (الشكل 26) .

قطرا الرباعي ا ب ا' حـ لهما نفس المنتصف فهو متوازي أضلاع .

ا ب ا' حـ متوازي أضلاع فيه $\widehat{\text{ب ا حـ}}$ = 90° فهو مستطيل .

نستنتج أن قطريه متقايسان أي ا ا' = ب حـ .

إذن : ا م $= \frac{1}{2}$ ب حـ .

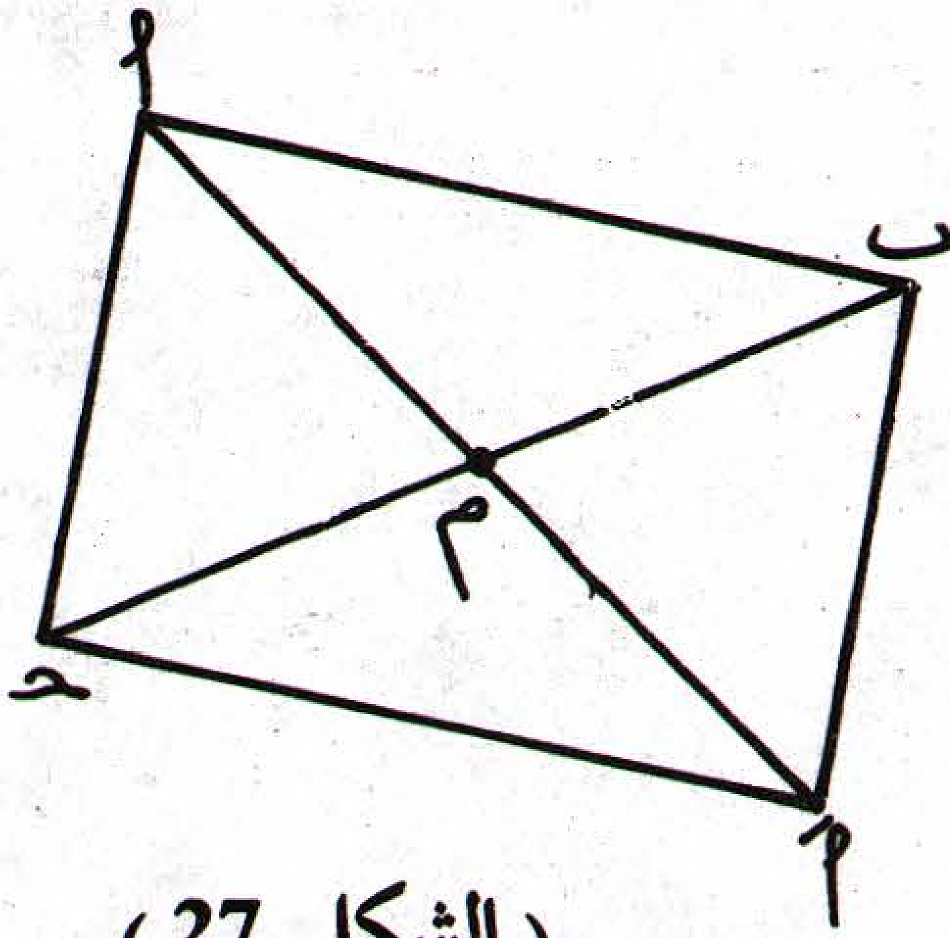
نظرية :

في المثلث القائم طول المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول هذا الوتر.

مسألة 3 :

ا ب حـ مثلث ، [ا م] متوسط متعلق بالضلع [ب حـ] حيث ا م = $\frac{1}{2}$ ب حـ .

لنبرهن أن المثلث ا ب حـ قائم في ا .



(الشكل 27)

البرهان :

لدينا ا م = $\frac{1}{2}$ ب حـ و [ا م] متوسط

إذن م ا = م ب = م حـ .

ننشىء ا' نظيرة ا بالنسبة إلى م ، (الشكل 27) .

فتكون م منتصف [ا ا'] .

نستنتج أن م ا = م ب = م حـ = م ا' ومنه ا ا' = ب حـ .

قطرا الرباعي ا ب ا' حـ لهما نفس المنتصف ومتقايسان ، فهو مستطيل .

ونستنتج أن $\widehat{ب ا حـ}$ = 90° ، فالمثلث ا ب حـ قائم في ا .

نظرية :

إذا كان في مثلث طول متوسط يساوي نصف طول الضلع المتعلق به فإن هذا المثلث قائم ووتره هذا الضلع .

من النظريتين السابقتين نستخلص النظرية الآتية :

نظرية :

المثلث ا ب ح قائم في ا
معناه
طول المتوسط المتعلق بالوتر [ب ح] يساوي $\frac{1}{2}$ ب ح

مسألة محلولة

ا ب ح مثلث . [ب ب′] ، [ح ح′] متوسطان له متقاطعان في النقطة ث. المستقيم (ا ث) يقطع [ب ح] في ا′ . ه هي نظيرة ا بالنسبة إلى ث. لنبرهن أن :

1) [ا ا′] متوسط للمثلث ا ب ح .

2) ث ح′ = $\frac{1}{2}$ ث ح ولنستنتج أن ث ح′ = $\frac{1}{3}$ ح ح′ .

المعطيات :

[ب ب′] ، [ح ح′] متوسطان في المثلث ا ب ح ،
[ب ب′] ∩ [ح ح′] = { ث } .
و (ا ث) ∩ [ب ح] = { ا′ } ، ه نظيرة ا بالنسبة إلى ث .

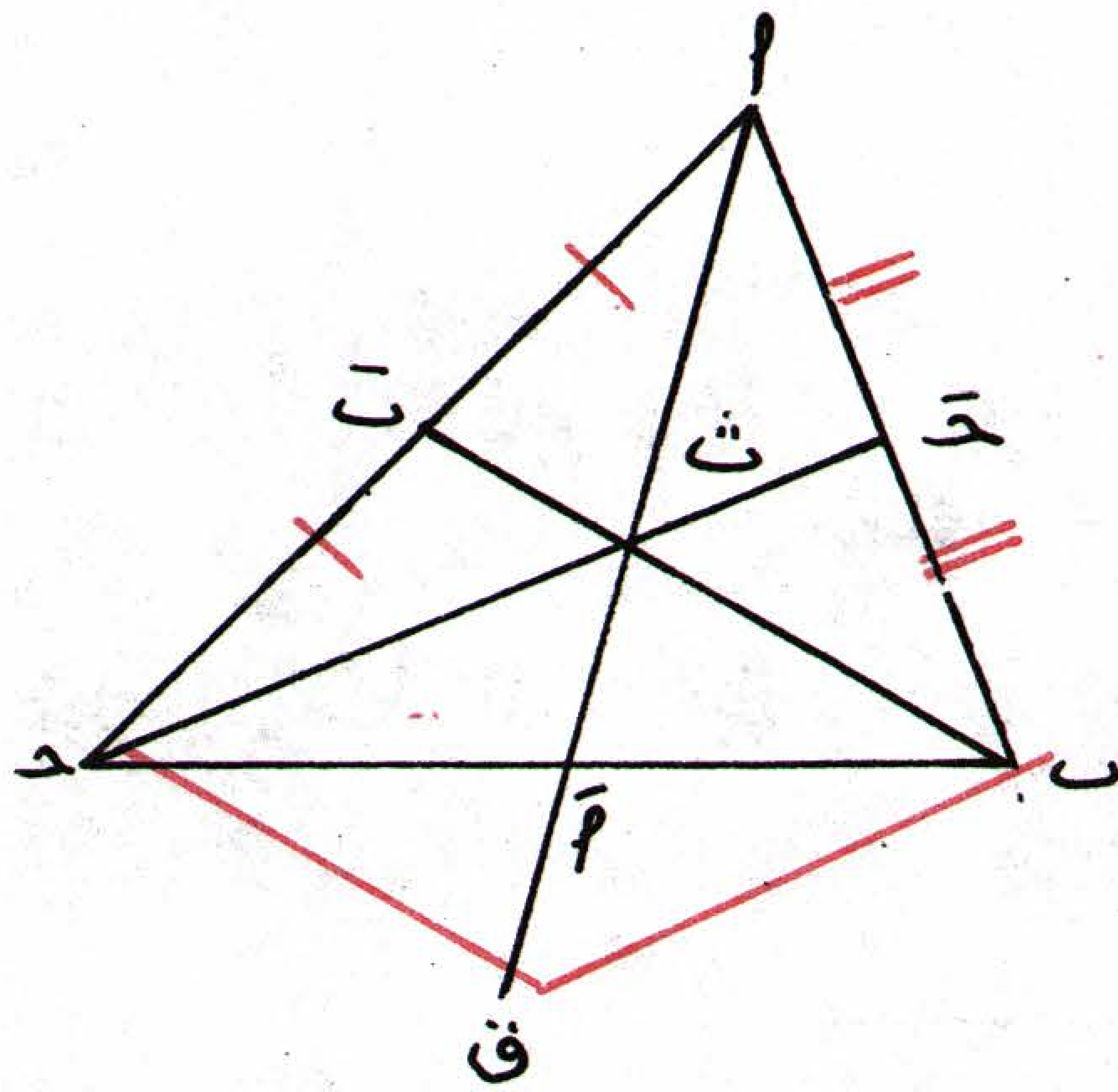
المطلوب :

إثبات أن :

1) [ا ا′] متوسط للمثلث ا ب ح .

2) ث ح′ = $\frac{1}{2}$ ث ح ثم استنتاج ث ح′ = $\frac{1}{3}$ ح ح′ .

البرهان :



(الشكل 28)

1 ـ في المثلث ا ب ه لدينا :

ح′، ث هما منتصفا الضلعين

[ا ب]، [ا ه].

إذن (ح′ث) // (ب ه)

و ح′ث $= \frac{1}{2}$ ب ه (نظرية).

ـ وفي المثلث ا ه ح لدينا :

ث، ب′ هما منتصفا الضلعين [ا ه]، [ا ح].

إذن (ث ب′) // (ه ح) و ث ب′ $= \frac{1}{2}$ ه ح (نظرية).

ـ في الرباعي ث ب ه ح لدينا : (ب ث) // (ه ح)

و (ث ح) // (ب ه).

إذن ث ب ه ح متوازي أضلاع.

نستنتج أن القطرين [ب ح]، [ث ه] لهما نفس المنتصف

النقطة ا′ هي منتصف [ب ح] يعني أن [ا ا′] متوسط للمثلث ا ب ح

وهو يشمل ث حسب المعطيات.

فالمتوسطات الثلاثة [ا ا′]، [ب ب′]، [ح ح′] تقاطع في النقطة ث

التي تسمى مركز ثقل المثلث.

2 ـ في متوازي الأضلاع ث ب ه ح لدينا : ب ه = ث ح

وبما أن ح′ث $= \frac{1}{2}$ ب ه

فإن ح′ث = $\frac{1}{2}$ ث ح ومنه ح′ث = $\frac{1}{3}$ ح ح′

ـ وبنفس الطريقة يمكننا أن نستنتج أن ا′ث = $\frac{1}{3}$ ا ا′

وأنّ ب′ث = $\frac{1}{3}$ ب ب′ .

ملاحظة : هذه المسألة مشهورة ولها تطبيقات خاصة في الفيزياء .

---

1. ا ب حـ ء معين ، هـ نظيرة ء بالنسبة إلى ا ؛ ى نظيرة حـ بالنسبة إلى ب .
   1) برهن أن الرباعي هـ ى حـ ء متوازي أضلاع .
   2) برهن أن المثلث ب هـ ء قائم في ب .
   3) نضع {م} = [ا حـ] ∩ [ب ء] . برهن أن الرباعي هـ ب حـ ا متوازي أضلاع .
   واستنتج بطريقتين أن ا م = $\frac{1}{2}$ هـ ب .
2. ا ب حـ ء مستطيل حيث [ا حـ] ∩ [ب ء] = {م} ؛ ى نقطة من القطعة [ا ب] تختلف عن منتصفها .
   1) المستقيم الذي يوازي (ب حـ) ويشمل ى يقطع كلا من [ا حـ] و [ب ء] في النقطتين ن و ل . برهن أن المثلث م ن ل متساوي الساقين .
   2) المستقيم الذي يوازي (ب ء) ويشمل ى يقطع [ا حـ] في ك . برهن أن المثلث ك ا ى متساوي الساقين .
   3) المستقيم الذي يوازي (ا حـ) ويشمل ى يقطع [ب ء] في هـ . أثبت أن
   م ك + م هـ = $\frac{ا حـ}{2}$.
3. م تنتمي إلى المستقيم (س ص) ، [م ع نصف مستقيم يختلف عن [م س و [م ص ، ا ∈ [م ع .
   (△) ، (△′) حاملا منصفي الزاويتين [م س ، م ع] و [م ع ، م ص] على الترتيب .
   ب ، حـ هما على الترتيب المسقطان العموديان للنقطة ا على (△) و (△′) .
   1) برهن أن المستقيمين (△) ، (△′) متعامدان .
   2) برهن أن الرباعي م ب ا حـ مستطيل .
4. ا ب حـ ء معين ، م نقطة تقاطع قطريه . هـ ، ف ، ل ، ى هي على الترتيب المساقط العمودية للنقطة م على المستقيمات (ا ب) ، (ب حـ) ، (حـ ء) ، (ء ا) .
   1) برهن أن م هـ = م ف = م ل = م ى .

2) برهن أن الرباعي هـ ف ل ج مستطيل .

5. ا ب حـ مثلث قائم في ا . أنشىء خارج هذا المثلث المربعين ا ب د هـ ، ا حـ ف و .

1) احسب الأقياس الآتية : $\widehat{د ا ب}$ ، $\widehat{ف ا حـ}$ ، $\widehat{د ا ف}$.

استنتج أن النقط د ، ا ، ف على استقامة واحدة .

2) ما نوع الرباعي د هـ حـ ب ؟ هل الرباعي د ا حـ ب متوازي أضلاع ؟

6. ا ب حـ د معين ، المستقيم الذي يشمل ا ويوازي (ب د) يقطع (حـ د) في النقطة هـ .

المستقيم الذي يشمل هـ ويوازي (ا د) يقطع (ا ب) في نقطة ج .

1) برهن أن الرباعي ا د هـ ج معين .

2) برهن أن المثلث ا حـ هـ قائم في ا .

3) برهن أن (ج د) // (ا حـ) .

7. ا ب حـ مثلث قائم في ا حيث ا ب $= \frac{1}{2}$ حـ ب .

1) برهن أن $\widehat{حـ} = \frac{1}{2}\widehat{ب}$. عيّن بالدرجات كلا من $\widehat{ب}$ و $\widehat{حـ}$.

2) د هي نظيرة ب بالنسبة إلى (ا حـ) ، برهن أن المثلث حـ د ب متقايس الأضلاع .

8. ا ب حـ مثلث متساوي الساقين قاعدته [ب حـ] . م ، ج هما منتصفا الضلعين [ا ب] ، [ا حـ] على الترتيب . و نقطة من [ب حـ] بحيث م و = م ب .

1) ما نوع الرباعي ا م و ج ؟

2) برهن أن $\widehat{ا م و} = \widehat{ب و م} + \widehat{حـ و ج}$.

3) برهن أن كلا من الرباعيين ب م ج و ، و م ج حـ متوازي أضلاع .

استنتج أن النقطة و هي منتصف القاعدة [ب حـ] .

9. ا ب حـ د رباعي، [ب د] قطر له . النقط هـ ، ج ، ل ، ط هي منتصفات أضلاعه .

ـ برهن أن الرباعي هـ ج ل ط متوازي أضلاع .

10. ا ب حـ مثلث . م ، ج ، ل منتصفات الأضلاع [ا ب] ، [ا حـ] ، [ب حـ] على الترتيب .

1) برهن أن الرباعي م ه ل ب متوازي أضلاع .
2) نظيرة أ بالنسبة إلى ل . ك منتصف [أ' ب] .

برهن أن النقط ه ، ل ، ك على استقامة واحدة . واستنتج أن أ ه ك ب متوازي أضلاع .

3) المستقيم (م ل) يقطع (أ' حـ) في ص.
برهن أن ص منتصف [أ' حـ]

11. أ ب حـ مثلث . منصف الزاوية [أ ب ، أ حـ] يقطع [ب حـ] في د.المستقيم الذي يشمل د ويوازي (أ ب) يقطع [أ حـ] في هـ .
1) برهن أن المثلث هـ أ د متساوي الساقين .
2) ك نقطة من [أ ب] بحيث ب ك = أ هـ . برهن أن (ك هـ) // (ب حـ) .

12. أ ب حـ د شبه منحرف حيث (أ د) // (ب حـ) . م منتصف الضلع [أ ب] . (ق) مستقيم يشمل م ويوازي (ب حـ) ويقطع [د حـ] في ه .
1) برهن أن (ق) يشمل منتصف [د حـ] . (استعن برسم أحد القطرين) .
2) برهن أن م ه = $\frac{1}{2}$(أ د + ب حـ) .

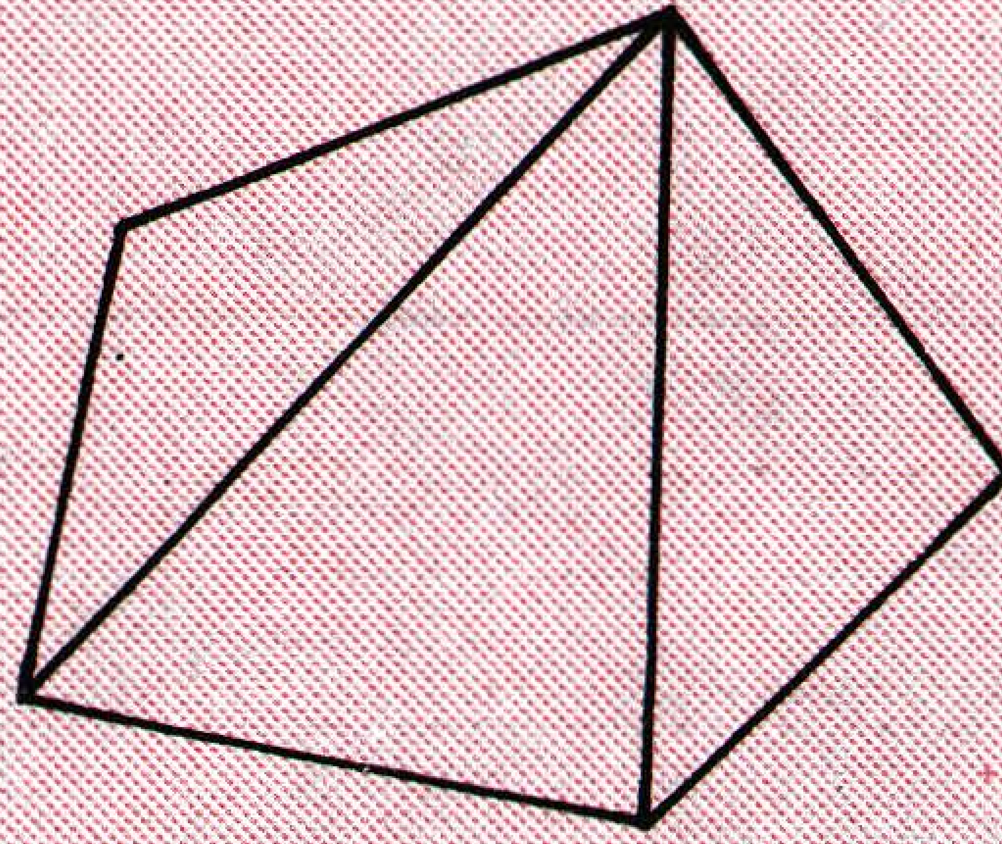
13. ب حـ د مثلث . [ب هـ] عمود متعلق بالضلع [حـ د] . النقطتان و ، ه هما منتصفا الضلعين [ب حـ] ، [ب د] على الترتيب .
1) برهن أن هـ و ه = ب و ه .
2) ك . ط هما المسقطان العموديان للنقطتين و ، ه على (حـ د) .
ما نوع الرباعي و ه ط ك ؟
3) برهن أن ك . ط هما منتصفا القطعتين [هـ حـ] ، [هـ د] على الترتيب . واستنتج أن و ه = $\frac{1}{2}$ حـ د .

مجموع أقياس زوايا مضلع

- تعريف

قطر المضلع هو قطعة مستقيمة طرفاها رأسان غير متتاليين لهذا المضلع .

- ارسم مضلعا له خمسة أضلاع ثم الأقطار التي أحد طرفيها رأس من هذا المضلع (كما في الشكل 29) .



- لاحظ أن عدد المثلثات الناتجة ثلاثة أي 5 – 2 .
- إن عدد المثلثات التي تحصل عليها في مضلع له ستة أضلاع وباتباع طريقة مماثلة هو أربعة أي 6 – 2 .
- وعدد المثلثات الناتجة باتباع نفس الطريقة في مضلع له سبعة أضلاع هو خمسة أي 7 – 2 .
- وفي الحالة العامة إذا كان المضلع له ن ضلع يكون عدد المثلثات المحصل عليها بالطريقة المقدمة هو (ن – 2) مثلثا .

وبالتالي فإن مجموع أقياس زوايا هذا المضلع هو (ن – 2) × 180° .

تطبيق :

- مجموع أقياس زوايا المضلع الذي عدد أضلاعه سبعة هو :
(7 – 2) × 180° أي 900° .
- ما هو قيس كل زاوية من مضلع منتظم عدد أضلاعه ستة ؟

11 الضرب والقسمة في ℚ ـ قوة عدد ناطق

الضرب في ℚ

1. جداء عددين ناطقين :

تعريف :

جداء العددين الناطقين $\frac{أ}{ب}$ و $\frac{ج}{د}$ هو العدد الناطق $\frac{أج}{بد}$

نكتب : $\frac{أ}{ب} \cdot \frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{ج}{د} = \frac{أج}{بد}$

أمثلة :

1) $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{5 \times 7}$ أي أن جداء العددين الكسريين $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{7}$ هو العدد الكسري $\frac{2 \times 3}{5 \times 7}$ أي $\frac{6}{35}$

2) $\left(\frac{-5}{7}\right) \times \left(\frac{+3}{4}\right) = \frac{(-5) \times (+3)}{7 \times 4} = \frac{-15}{28}$.

3) $3 \times \left(\frac{-7}{5}\right) = \frac{3}{1} \times \left(\frac{-7}{5}\right) = \frac{3 \times (-7)}{1 \times 5} = \frac{-21}{5}$.

4) $\left(-\frac{5}{21}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{-5}{21}\right) \times \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{(-5) \times (-4)}{21 \times 3} = \frac{+20}{63}$.

5) $\left(-\frac{8}{9}\right) \times \left(+\frac{5}{15}\right) = -\frac{8 \times 5}{9 \times 15} = -\frac{40}{135}$.

2. الضرب في ك :

تلاحظ أنه يمكن أن نرفق كل ثنائية مرتبة $\left(\frac{أ}{ب} ، \frac{جـ}{د}\right)$ من ك × ك بالعدد الناطق $\frac{أ جـ}{ب د}$ الذي هو جداء $\frac{أ}{ب}$ و $\frac{جـ}{د}$ ، وبذلك نعرف تطبيقا من ك × ك إلى ك .

تعريف :

التطبيق من ك × ك إلى ك الذي يرفق كل ثنائية مرتبة $\left(\frac{أ}{ب} ، \frac{جـ}{د}\right)$ بالعدد الناطق $\frac{أ جـ}{ب د}$ جداء العددين الناطقين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ يسمى عملية الضرب في ك .

نكتب : ك × ك ⟵ ك

$$\left(\frac{أ}{ب} ، \frac{جـ}{د}\right) \longmapsto \frac{أ جـ}{ب د}$$

• أكمل الجدول الآتي ولاحظ إشارة الجداء $\frac{أ جـ}{ب د}$ وإشارتي عامليه $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$.

$\frac{أ}{ب}$	$+\frac{20}{7}$	$\frac{-12}{35}$	$\frac{-17}{3}$	$\frac{3}{-4}$	$-\frac{5}{7}$	$+\frac{8}{7}$	$-\frac{9}{5}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
$\frac{جـ}{د}$	$\frac{-9}{15}$	$\frac{7}{15}$	+6	$\frac{-4}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{7}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{أ جـ}{ب د}$										

قاعدة الإشارات : $\frac{أ}{ب}$ و $\frac{حـ}{د}$ عددان ناطقان .

إشارة	$\frac{أ}{ب}$	+	-	-	+
إشارة	$\frac{حـ}{د}$	-	+	-	+
إشارة	$\frac{أحـ}{بد}$	-	-	+	+

3. القيمة المطلقة لجداء عددين ناطقين :

مثال 1 :

$$\left|\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\right| = \left|+\frac{5\times 3}{6\times 4}\right| = \frac{15}{24}$$

$$\left|-\frac{5}{6}\right|\times\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{5}{6}\times\frac{3}{4} = \frac{15}{24}.$$

إذن : $\left|\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\right| = \left|-\frac{5}{6}\right|\times\left|-\frac{3}{4}\right|$.

مثال 2 :

$$\left|\left(+\frac{7}{8}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)\right| = \left|+\frac{7}{8}\right|\times\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{7}{8}\times\frac{3}{5} = \frac{21}{40}.$$

بصفة عامة :

$\frac{أ}{ب}$ و $\frac{جـ}{د}$ عددان ناطقان

$$\left|\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د}\right| = \left|\frac{أ}{ب}\right| \times \left|\frac{جـ}{د}\right| .$$

4. خواص الضرب في ك .

1) التبديل :

ـ أكمل الجدول الآتي :

س	ع	س.ع	ع.س
$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{7}$		
$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{3}$		
-10	$-\frac{8}{7}$		

تجد في كل حالة أن: س . ع = ع . س .

نتيجة :

مهما يكن العددان الناطقان س ، ع فإن :
س . ع = ع . س

نقول إن الضرب في ك عملية تبديلية .

2) التجميع :

ـ أكمل الجدول الآتي :

س	ع	ص	(س.ع).ص	س.(ع.ص)
$\frac{-3}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{33}{12}$	$\frac{-2}{3}$	-9		
$\frac{-3}{21}$	$\frac{2}{-3}$	$\frac{-3}{4}$		

تجد في كل حالة أن : (س . ع) . ص = س . (ع . ص)

نتيجة :

مهما تكن الأعداد الناطقة س ، ع ، ص فإن :
(س . ع) . ص = س . (ع . ص)

نقول إن الضرب في $\mathbb{Q}$ عملية **تجميعية** .

3) العنصر الحيادي :

احسُب ما يلي : $1\times\frac{-5}{7}$ ، $1\times\frac{4}{9}$ ، 1×0 ، $1\times\frac{+3}{-3}$.

تجد في كل حالة أن : 1 × س = س × 1 = س
حيث س عدد ناطق .

نتيجة :

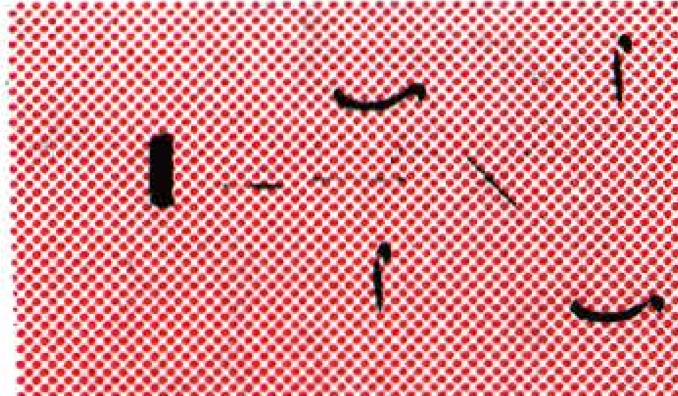
> مهما يكن العدد الناطق س فإن :
> س × 1 = 1 × س = س

نقول إن العدد الناطق 1 هو **العنصر الحيادي** بالنسبة إلى عملية الضرب في ك .

4) نظير عدد ناطق بالنسبة إلى عملية الضرب في ك :

ـ أكمل الجدول الآتي :

أ/ب	ب/أ	أ/ب × ب/أ
$\frac{3}{2}$		
$-\frac{5}{6}$		
	$-\frac{1}{2}$	
-6		

تجد في كل حالة أن : 

نقول إن العددين الناطقين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ب}{أ}$ **متناظران** بالنسبة إلى عملية الضرب في ك .

- العدد الناطق $\frac{ب}{أ}$ يسمى **مقلوب** العدد الناطق $\frac{أ}{ب}$.

فالعددان $\frac{أ}{ب}$ و $\frac{ب}{أ}$ أحدهما مقلوب الآخر .

نتيجة :

لكل عدد ناطق غير معدوم $\frac{أ}{ب}$ نظير بالنسبة إلى عملية الضرب في ك هو مقلوبه $\frac{ب}{أ}$.

- نصطلح على كتابة مقلوب العدد الناطق غير المعدوم س على الشكل $\frac{1}{س}$.

أي إذا كان س $= \frac{أ}{ب}$ فإن $\frac{1}{س} = \frac{ب}{أ}$.

أمثلة :

س $= \frac{3}{5}$ ، $\frac{1}{س} = \frac{5}{3}$ ؛ س $= -\frac{3}{7} = \frac{-3}{7}$ ، $\frac{1}{س} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$.

س $= -6$ ، $\frac{1}{س} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$.

س $= \frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{س} = 5$.

خلاصة :

عملية الضرب في $\mathbb{Q}$:

ـ تبديلية .

ـ تجميعية .

ـ العدد الناطق 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة إلى هذه العملية .

ـ لكل عدد ناطق غير معدوم نظير بالنسبة إلى عملية الضرب في $\mathbb{Q}$ هو مقلوبه .

5. المساواة والضرب :

مثال : تعْلم أن الكسرين $\frac{-13}{9}$ ، $\frac{-39}{27}$ يمثلان نفس العدد الناطق .

أي : $\frac{-13}{9} = \frac{-39}{27}$

لنضرب كلاًّ من $\frac{-13}{9}$ ، $\frac{-39}{27}$ في العدد الناطق $\frac{2}{5}$.

نجد $\frac{-13}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{-26}{45}$ و $\frac{-39}{27} \times \frac{2}{5} = \frac{-78}{135}$

لاحظ أنَّ $(-26) \times 135 = 45 \times (-78)$.

إذن $\frac{-26}{45} = \frac{-78}{135}$ أي $\frac{-13}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{-39}{27} \times \frac{2}{5}$

بصفة عامة يمكن أن نبرهن على النظريتين الآتيتين :

س ، ع ، ص أعداد ناطقة .

إذا كان س = ع فإن س . ص = ع . ص

إذا كان س . ص = ع . ص و ص ≠ 0 فإن :
س = ع

القسمة في ك

1. حاصل قسمة عدد ناطق على آخر :

مسألة :

$-\frac{5}{6}$ ، $\frac{7}{3}$ عددان ناطقان ، هل يوجد عدد ناطق س بحيث $(-\frac{5}{6}) \times س = \frac{7}{3}$ ؟

الحل : نعلم أنه إذا كان $(-\frac{5}{6}) \times س = \frac{7}{3}$ فإن

$[(-\frac{5}{6}) \times س] \times (-\frac{6}{5}) = \frac{7}{3} \times (-\frac{6}{5})$.

وبما أن عملية الضرب في ك تجميعية وتبديلية فإن

$[(-\frac{5}{6}) \times (-\frac{6}{5})] س = \frac{7}{3} \times (-\frac{6}{5})$.

فيكون $1 \times س = \frac{7}{3} \times (\frac{-6}{5})$

وتعلم أن العدد الناطق 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة إلى عملية الضرب في ك .

إذن $س = \frac{7}{3} \times (\frac{-6}{5})$

أي س $= \frac{42}{15} = \frac{3 \times 14}{3 \times 5} = \frac{14}{5}$.

• تحقق أن $\left(\frac{5}{6}\right) \times \left(\frac{14}{5}\right) = \frac{3}{7}$

العدد الناطق **الوحيد** س الذي يحقق المساواة $\left(\frac{5}{6}\right) \times$ س $= \frac{7}{3}$ هو $\frac{14}{5}$

ويسمى حاصل **قسمة** العدد الناطق $\frac{7}{3}$ على العدد الناطق $\left(\frac{5}{6}\right)$

ونكتب $\frac{7}{3} : \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{7}{3} \times \left(\frac{6}{5}\right) = \frac{14}{5}$.

تعريف :

حاصل قسمة العدد الناطق س على العدد الناطق غير المعدوم ع هو العدد الناطق الوحيد و ، حيث س = ع . و

يمكن أن نبرهن أن :

حاصل قسمة العدد الناطق $\frac{أ}{ب}$ على العدد الناطق غير المعدوم $\frac{حـ}{ء}$ هو العدد الناطق $\frac{أ . ء}{ب . حـ}$

نتيجة :

حاصل قسمة عدد ناطق على عدد ناطق غير معدوم يساوي جداء العدد الناطق الأول ومقلوب العدد الناطق الثاني .

مثال :

$$\left(-\frac{13}{4}\right) : \frac{7}{8} = \left(-\frac{13}{4}\right) \times \frac{8}{7} = -\frac{104}{28} = -\frac{4 \times 26}{4 \times 7} = -\frac{26}{7}$$

1) أوجد حاصل قسمة العدد الناطق س على العدد الناطق ع في كل من الحالات الآتية :

س = $\frac{2}{3}$ و ع = $\frac{5}{4}$ ؛ س = $-\frac{3}{4}$ و ع = $-\frac{12}{7}$ ؛ س = -9 و ع = $\frac{1}{3}$.

2) احسُب

$\left(\frac{9}{8}\right) : \left(-\frac{8}{9}\right)$ ؛ $\left(-\frac{17}{7}\right) : \left(-\frac{17}{7}\right)$ ؛ $3 : \left(\frac{-1}{5}\right)$.

2. القسمة في ك :

تلاحظ أنه يمكن أن نرفق كل ثنائية مرتبة $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} ، \frac{\text{ح}}{\text{ء}}\right)$ من ك × ك* بالعدد الناطق $\frac{\text{أء}}{\text{بح}}$ الذي هو حاصل قسمة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ على $\frac{\text{ح}}{\text{ء}}$ ، وبذلك نعرف تطبيقا من ك × ك* إلى ك .

تعريف :

التطبيق من ك × ك* إلى ك الذي يرفق كل ثنائية مرتبة $(\frac{أ}{ب} ، \frac{ج}{د})$ بالعدد الناطق $\frac{أ د}{ب ج}$ يسمى عملية القسمة في ك.

نكتب : ك × ك* ⟵ ك

$(\frac{أ}{ب} ، \frac{ج}{د}) \longmapsto \frac{أ د}{ب ج}$.

3. القيمة المطلقة لحاصل قسمة عدد ناط على آخر :

مثال 1 :

لنحسب $\left|\frac{-\frac{7}{9}}{\frac{3}{2}}\right|$ و $\frac{\left|-\frac{7}{9}\right|}{\left|\frac{3}{2}\right|}$ ثـ نارن بينهما .

نجد أن : $\left|\frac{-\frac{7}{9}}{\frac{3}{2}}\right| = \left|(-\frac{7}{9}) \times (\quad)\right| = \left|\frac{14}{27}+\right| = \frac{14}{27}$.

و $\dfrac{\left|-\dfrac{7}{9}\right|}{\left|-\dfrac{3}{2}\right|} = \dfrac{\dfrac{7}{9}}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{7}{9} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{27}$.

إذن $\left|\dfrac{-\dfrac{7}{9}}{-\dfrac{3}{2}}\right| = \dfrac{\left|-\dfrac{7}{9}\right|}{\left|-\dfrac{3}{2}\right|}$

نتيجة :

س ، ع عددان ناطقان حيث ع ≠ 0

$\left|\dfrac{\text{س}}{\text{ع}}\right| = \dfrac{|\text{س}|}{|\text{ع}|}$

1. القوة ذات الأس الطبيعي :

$\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$ عدد ناطق .

1) نعلم أن $\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} \cdot \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{أ} \cdot \text{أ}}{\text{ب} \cdot \text{ب}} = \dfrac{\text{أ}^2}{\text{ب}^2}$.

العدد الناطق $\frac{أ^2}{ب^2}$ هو مربع العدد الناطق $\frac{أ}{ب}$.

نكتب $\frac{أ}{ب} \cdot \frac{أ}{ب} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^2$

أي $\left(\frac{أ}{ب}\right)^2 = \frac{أ^2}{ب^2}$

مثال :

$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9}$.

2) نعلم أيضا أن $\frac{أ}{ب} \cdot \frac{أ}{ب} \cdot \frac{أ}{ب} = \frac{أ \cdot أ \cdot أ}{ب \cdot ب \cdot ب} = \frac{أ^3}{ب^3}$.

العدد الناطق $\frac{أ^3}{ب^3}$ هو مكعب العدد الناطق $\frac{أ}{ب}$.

نكتب $\frac{أ}{ب} \cdot \frac{أ}{ب} \cdot \frac{أ}{ب} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^3$

أي $\left(\frac{أ}{ب}\right)^3 = \frac{أ^3}{ب^3}$

3. إذا كان ن عددًا طبيعيًا غير معدوم فالجداء :

$\underbrace{\frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times \ldots\ldots \times \frac{أ}{ب}}_{\text{ن عاملا}}$ يكتب $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن}$

$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن}$ يسمى **القوة النونية** للعدد $\frac{أ}{ب}$.

ونقرأ $\left(\frac{أ}{ب}\right)$ **أس** ن .

تعريف :

القوة النونية للعدد الناطق $\frac{أ}{ب}$ هي جداء ن عامل كل عامل يساوي $\frac{أ}{ب}$.

نكتب

$$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \underbrace{\frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times \ldots \times \frac{أ}{ب}}_{\text{ن عاملا}} = \frac{أ \times أ \times أ \times \ldots \times أ}{ب \times ب \times ب \times \ldots \times ب} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$$

$$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$$

ملاحظة : $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{1} = \frac{أ}{ب}$.

نصطلح على أن $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{0} = 1$ حيث $\frac{أ}{ب} \neq 0$

1) احسُب كلاًّ مما يلي :

$\left(\frac{3}{-2}\right)^4$ ، $\left(\frac{-7}{5}\right)^3$ ، $\left(\frac{-1}{-2}\right)^6$ ، $\left(\frac{-5}{10}\right)^4$.

2) بيِّن أن كلاًّ من العددين الناطقين $\frac{3^4}{-2}$ و $\frac{3}{(-2)^4}$

يختلف عن العدد الناطق $\left(\frac{3}{-2}\right)^4$.

2. القوة ذات الأس السالب :

• نعلم أن مقلوب $\frac{5}{7}$ هو $\frac{7}{5}$

وأن $1 : \frac{5}{7} = 1 \times \frac{7}{5} = \frac{7}{5}$

إذن $\frac{1}{\frac{5}{7}} = \frac{7}{5}$

فيكون $\left(\frac{1}{\frac{5}{7}}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{5}{7}\right)^2} = \left(\frac{7}{5}\right)^2$

و $\frac{1}{\left(\frac{5}{7}\right)^3} = \left(\frac{7}{5}\right)^3$

أي أن مقلوب $(\frac{5}{7})^2$ هو $(\frac{7}{5})^2$ ومقلوب $(\frac{5}{7})^3$ هو $(\frac{7}{5})^3$.

- إذا كان ن عددا صحيحا فإن مقلوب $(\frac{5}{7})^{\text{ن}}$ هو $(\frac{7}{5})^{\text{ن}}$

نتيجة :

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ عددًا ناطقا غير معدوم و ن عددًا صحيحًا فإن مقلوب $(\frac{\text{أ}}{\text{ب}})^{\text{ن}}$ هو $(\frac{\text{ب}}{\text{أ}})^{\text{ن}}$.

أي $\frac{1}{(\frac{\text{أ}}{\text{ب}})^{\text{ن}}} = (\frac{\text{ب}}{\text{أ}})^{\text{ن}}$

نصطلح على كتابة مقلوب $(\frac{\text{أ}}{\text{ب}})^{\text{ن}}$ على الشكل $(\frac{\text{أ}}{\text{ب}})^{-\text{ن}}$

$$\frac{1}{(\frac{\text{أ}}{\text{ب}})^{\text{ن}}} = (\frac{\text{أ}}{\text{ب}})^{-\text{ن}}$$

أمثلة :

$\frac{1}{(\frac{6}{8})^2} = (\frac{6}{8})^{-2}$ أي $(\frac{8}{6})^2 = (\frac{6}{8})^{-2}$ ؛

$\left(\frac{9}{13}\right)^{3} = \left(\frac{13}{9}\right)^{-3}$ ؛ $\left(\frac{9}{16}\right)^{-1} = \frac{16}{9}$ ؛ $\left(\frac{7}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{7}\right)^{1} = \frac{4}{7}$.

ـ اكتب الأعداد الناطقة الآتية على شكل قوة ذات أس سالب :

$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{5}}$ ، $\frac{1}{\left(\frac{6}{7}\right)}$ ، $\frac{1}{2^{7}}$ ؛ $\frac{1}{(-3)^{5}}$ ؛ $\frac{1}{(3,7)^{6}}$.

3. خواص القوى في ك :

1) جداء قوتين لنفس العدد الناطق :

مثال 1 :

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{3} = \underbrace{\left[\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right]}_{\text{4 عوامل}} \times \underbrace{\left[\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right]}_{\text{3 عوامل}}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{3} = \underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)}_{\text{(4 + 3) عوامل}}$$

إذن $\left(-\frac{3}{2}\right)^{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{3+4} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{7}$

مثال 2 :

$$\left(\frac{5}{-7}\right)^{-2} \times \left(\frac{5}{-7}\right)^{3} = \left(\frac{-7}{5}\right)^{2} \times \left(\frac{5}{-7}\right)^{3}$$

$$= \left[\left(\frac{-7}{5}\right) \times \left(\frac{-7}{5}\right)\right] \times \left[\left(\frac{5}{-7}\right) \times \left(\frac{5}{-7}\right) \times \left(\frac{5}{-7}\right)\right]$$

$$\left(\frac{5}{-7}\right)^{2} \times \left(\frac{5}{-7}\right)^{3} = \left[\left(\frac{-7}{5}\right) \times \left(\frac{5}{-7}\right)\right] \times \left[\left(\frac{-7}{5}\right) \times \left(\frac{5}{-7}\right)\right] \times \left(\frac{5}{-7}\right)$$

$$= 1 \times 1 \times \left(\frac{5}{-7}\right) = \frac{5}{-7}$$

$$\left[\left(\frac{5}{-7}\right)^{-2} \times \left(\frac{5}{-7}\right) = \left(\frac{5}{-7}\right)^{-2+3} = \left(\frac{5}{-7}\right) = \frac{5}{-7}\right]$$

نتيجة :

ن ، هـ عددان صحيحان .
مهما يكن العدد الناطق غير المعدوم س فإن
$س^{ن} \times س^{هـ} = س^{ن + هـ}$

3) حساب قوة لقوة أخرى :

مثال 1 :

$$\left[\left(\frac{-4}{5}\right)^{2}\right]^{3} = \left(\frac{-4}{5}\right)^{2} \times \left(\frac{-4}{5}\right)^{2} \times \left(\frac{-4}{5}\right)^{2}$$

$$\left[\left(\frac{-4}{5}\right)^{2}\right]^{3} = \underbrace{\left[\left(\frac{-4}{5}\right) \times \left(\frac{-4}{5}\right)\right]}_{\text{عاملان}} \times \underbrace{\left[\left(\frac{-4}{5}\right) \times \left(\frac{-4}{5}\right)\right]}_{\text{عاملان}} \times \underbrace{\left[\left(\frac{-4}{5}\right) \times \left(\frac{-4}{5}\right)\right]}_{\text{عاملان}}$$

$$\left[\left(\frac{-4}{5}\right)^2\right]^3 = \underbrace{\left(\frac{-4}{5}\right)\times\left(\frac{-4}{5}\right)\times\left(\frac{-4}{5}\right)\times\left(\frac{-4}{5}\right)\times\left(\frac{-4}{5}\right)\times\left(\frac{-4}{5}\right)}_{\text{عوامل } (2\times 3)}.$$

$$\left[\left(\frac{-4}{5}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{-4}{5}\right)^{2\times 3} = \left(\frac{-4}{5}\right)^6.$$

مثال 2 :

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^2 = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^2 = \frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-6}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{(-3)\times 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-6}.$$

نتيجة :

> **ن و هـ عددان صحيحان ،**
> **مهما يكن العدد الناطق غير المعدوم س فإن :**
> $(س^{ن})^{هـ} = س^{ن \times هـ}$

2) قوة جداء عددين ناطقين :

مثال 1 :

$$\left[\left(\frac{-8}{7}\right)\times\frac{9}{5}\right]^{3} = \left[\left(\frac{-8}{7}\right)\times\frac{9}{5}\right]\times\left[\left(\frac{-8}{7}\right)\times\frac{9}{5}\right]\times\left[\left(\frac{-8}{7}\right)\times\frac{9}{5}\right].$$

بما أن الضرب في ك عملية تبديلية وتجميعية فإن :

$$\left[\left(\frac{-8}{7}\right)\times\frac{9}{5}\right]^{3} = \underbrace{\left[\left(\frac{-8}{7}\right)\times\left(\frac{-8}{7}\right)\times\left(\frac{-8}{7}\right)\right]}_{\text{3 عوامل}}\times\underbrace{\left[\frac{9}{5}\times\frac{9}{5}\times\frac{9}{5}\right]}_{\text{3 عوامل}}$$

$$\left[\left(\frac{-8}{7}\right)\times\frac{9}{5}\right] = \left(\frac{-8}{7}\right)^{3}\times\left(\frac{9}{5}\right)^{3}$$

مثال 2 :

$$\left[\left(\frac{-3}{2}\right)\times\frac{5}{6}\right]^{-2} = \frac{1}{\left[\left(\frac{-3}{2}\right)\times\frac{5}{6}\right]^{2}} = \frac{1}{\left(\frac{-3}{2}\right)^{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{2}}$$

$$\left[\left(\frac{-3}{2}\right)\times\frac{5}{6}\right]^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{-3}{2}\right)^{2}}\times\frac{1}{\left(\frac{5}{6}\right)^{2}}$$

$$\left[\left(\frac{-3}{2}\right)\times\frac{5}{6}\right]^{-2}=\left(\frac{-3}{2}\right)^{-2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}$$

نتيجة :

ن عدد صحيح ،
مهما يكن العددان الناطقان غير المعدومين س ، ع فإن :
$(\text{س}\,.\,\text{ع})^{\text{ن}}=\text{س}^{\text{ن}}\,.\,\text{ع}^{\text{ن}}$

4) حاصل قسمة قوة عدد على قوة أخرى لنفس العدد :

• $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ عدد ناطق غير معدوم . ن و هـ عددان صحيحان .

لاحظ أن :

$$\frac{\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}}}{\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{هـ}}}=\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}}\times\frac{1}{\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{هـ}}}$$

ونعلم أن :

$$\frac{1}{\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{هـ}}}=\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{-\text{هـ}}$$

إذن $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} : \left(\frac{أ}{ب}\right)^{هـ} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} \times \left(\frac{أ}{ب}\right)^{-هـ} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن + (-هـ)}$

أي $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} : \left(\frac{أ}{ب}\right)^{هـ} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن - هـ}$

نتيجة :

ن ، هـ عددان صحيحان .
مهما يكن العدد الناطق غير المعدوم س فإن :
$س^{ن} : س^{هـ} = س^{ن - هـ}$

ـ احسب ما يلي :

1) $2^{6} \times 2^{3}$ ؛ $10^{5} \times 10^{-3}$ ؛ $\frac{3}{7} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{-4}$ ؛ $\left(\frac{3}{7} \times \frac{3}{7}\right)^{-4}$ ؛ $(0,5)^{2} \times \left(\frac{5}{10}\right)^{3}$

2) $\left(\frac{-3}{10} \times 7\right)^{2}$ ، $\left[3^{2} \times \left(\frac{-1}{2}\right)^{3}\right]^{2}$ ؛ $\left[(3^{-2})^{5} \times (3^{-3})^{3}\right]^{2}$

3) $(9^{-3} \times 3^{7})^{-1}$ ؛ $\frac{27^{2}}{9 \times 81}$ ؛ $\frac{(-2)^{9}}{(-2)^{11}}$ ؛ $\left[\frac{(-2)^{2}}{(-3)^{3}}\right]^{-1}$

التمارين

1. احسُب الجداءات الآتية :

1) $\left(\frac{-2}{5}\right)\times\left(\frac{7}{-8}\right)$ ؛ $\left(\frac{-12}{5}\right)\times\left(\frac{-9}{2}\right)$ ؛ $\left(\frac{3}{-7}\right)\times\left(\frac{21}{-45}\right)$ ؛

$\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{20}{15}\right)\times\left(\frac{-16}{48}\right)\times 3$.

2) $\left(\frac{34}{8}\right)\times\left(\frac{15}{-7}\right)$ ؛ $12\times\left(\frac{-16}{27}\right)$ ؛ $(-6)\times\left(\frac{4}{-5}\right)$

$\left(\frac{33}{-45}\right)\times(-12)$ ؛ $\left(\frac{23}{-4}\right)\times\frac{14}{36}$.

3) $\left(\frac{-11}{2}\right)\times\left(\frac{42}{-8}\right)\times\left(\frac{36}{-42}\right)$ ؛ $(-18)\times\left(\frac{25}{-6}\right)\times\left(\frac{15}{-18}\right)$ ؛

$\left(\frac{-25}{3}\right)\times\left(\frac{-9}{2}\right)\times\left(\frac{-8}{15}\right)$.

2. أ ، ب عددان صحيحان غير معدومين . احسُب الجداءات الآتية :

1) $\left(\frac{-6\text{أ}}{5}\right)\times\left(\frac{-12}{15\text{أ}}\right)$ ؛ $\left(\frac{12}{-5}\right)\times(-\text{أ})$ ؛ $\left(\frac{-3\text{أ}}{5}\right)\times\left(\frac{15}{-9\text{ب}}\right)$

2) $\left(\frac{-9}{\text{أ}}\right)\times\left(\frac{4\text{أ}^3\text{ب}}{-7}\right)\times\left(\frac{-5}{2\text{أ}^2\text{ب}}\right)$ ، $\left(\frac{-\text{أ}}{5}\right)\times\left(\frac{15\text{ب}}{21\text{أ}}\right)\times\left(\frac{7\text{أ}}{\text{ب}^2}\right)$ ؛

$\left(\frac{\text{أ}}{4}\right)\left(\frac{4\text{ب}}{\text{أ}}\right)\times\text{أ}\text{ب}$.

3. 1) عيّن العدد الناطق س بحيث يكون $\frac{4}{5}$. س = $\frac{12}{-20}$.

2) عيّن الأعداد الناطقة بحيث إذا ضربنا كلاً منها في العدد (−11) نحصل على الأعداد الناطقة الآتية :

$\frac{11}{9}$ ، $\frac{-11}{18}$ ، 1 ، $\frac{22}{3}$.

4. عيّن العدد الناطق $\frac{أ}{ب}$ ، بحيث يكون :

1) $\left(\frac{-7}{4} \times \frac{أ}{ب}\right) \times \frac{5}{12} = \frac{-8}{9}$.

2) $\left(-\frac{13}{11} \times \frac{7}{9}\right) \times \frac{أ}{ب} = -\frac{99}{26}$.

5. 1) أوجد مقلوب كل من الأعداد الناطقة التالية :

2 ، −3 ، $-\frac{7}{4}$ ، $\frac{6}{7}$.

2) عيّن ـ في كل حالة من الحالات الآتية ـ العدد الناطق أ حيث يكون :

2أ = −1 ؛ −3أ = $\frac{2}{5}$ ؛ $\frac{-7}{4}$أ = −5 ؛ $\frac{6}{-7}$أ = $\frac{11}{9}$.

6. احسُب كلاً مما يلي :

1) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{-5}{7}}$ ؛ $\frac{\frac{-15}{20}}{\frac{-24}{18}}$ ؛ $\frac{\frac{-32}{48}}{\frac{-33}{-22}}$ ؛ $-\frac{-\frac{17}{25}}{\frac{85}{-125}}$ ؛ $\frac{-\frac{4}{9}}{\frac{16}{-45}}$.

2) $\dfrac{\frac{-6}{-21}}{9}$ ؛ $\dfrac{24}{\frac{-7}{30}}$ ؛ $\dfrac{1}{\frac{3}{-4}}$ ؛ $\dfrac{\frac{-12}{-1}}{-9}$

7. 1) احسُب حاصل قسمة $\dfrac{\frac{-3}{4}}{\frac{5}{-6}}$ على $\dfrac{4}{5}$.

2) احسُب حاصل قسمة $\dfrac{\frac{51}{4}}{\frac{17}{12}}$ على $\dfrac{1}{3}$.

8. 1) بأي عدد ناطق تقسم $\dfrac{25}{36}$ لتحصل على $\dfrac{-5}{9}$ ؟

2) حاصل قسمة العدد الناطق $\dfrac{-28}{15}$ على $\dfrac{أ}{ب}$ هو $\dfrac{-12}{7}$.

أوجد العدد الناطق $\dfrac{أ}{ب}$.

9. احسُب كلاً من الأعداد الناطقة الآتية :

1) $\left(\dfrac{-4}{3}\right)^2$ ؛ $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^2$ ؛ $\left(\dfrac{4}{-5}\right)^3$ ؛ $\left(\dfrac{1}{-2}\right)^3$.

2) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \times \left(\dfrac{-3}{2}\right)^3$ ؛ $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^3 \times \left(\dfrac{1}{-2}\right)$ ؛ $\left[\left(\dfrac{-4}{5}\right)^2\right]^3$ ؛ $\left[\left(\dfrac{4}{-3}\right)^3 \times (-15)\right]$

10. احسب كلاًّ من الأعداد الناطقة التالية :

$$\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^3}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2} \;؛\; \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^2}{\left(-\frac{2}{5}\right)^4} \;؛\; \left(\frac{5}{3}\right)^2 \times \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^4}{\left(\frac{5}{3}\right)^3} .$$

11. أ ، ب عددان صحيحان غير معدومين. احسُب كلاًّ من الأعداد الناطقة الآتية :

1) $\left(\frac{\text{أ}}{-3}\right)^2 \;؛\; \left(-\frac{3\text{أ}}{4}\right)^3 \;؛\; \left(\frac{-7\text{أ}}{5\text{ب}}\right)^2 \;؛\; \left(\frac{-2\text{أ}}{-\text{ب}}\right)^3 .$

2) $\left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{-\text{أ}}{-\text{ب}}\right)^{-2} \;؛\; \frac{2}{3} \times \left(\frac{-\text{أ}^3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{-\text{ب}}\right)^3 \;؛\; \left(\frac{4}{-3} \times \frac{-\text{أ}^3}{-\text{ب}}\right) \times \left(\frac{2}{7} \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}^3}\right)^3 .$

12. أ ، ب عددان صحيحان .

1) اكتُب كلاًّ من الأعداد الناطقة الأتية على شكل قوة ذات أس سالب :

$$\frac{1}{(-3)^2} \;؛\; \frac{1}{\left(\frac{2}{-5}\right)^3} \;؛\; \frac{1}{(-2)^4} \;؛\; \frac{1}{\text{أ}^5} \;؛\; \frac{1}{\text{أ}^7 \cdot \text{ب}^7} .$$

2) احسُب كلاًّ مما يلي :

$$(+3)^{-3} \;؛\; (-2)^{-4} \;؛\; \left(\frac{-3}{-4}\right)^{-2} \;؛\; \left[(-2)^3\right]^{-2} \;؛\; \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^3 ؛$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{7}{5}\right)^2 \;؛\; \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \;؛\; \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{-4}$$

13. اكتب بأبسط شكل كلاً مما يلي :

1) $\frac{(36)(-12)(-15)}{(-25)(+4)(-9)}$ ، $\frac{(-2)^3(-10)(+3)^2}{(-3)^2(+15)(-4)^2}$ ، $\frac{(-21)(-3)^2(+4)^2}{(-15)(+14)(-9)}$.

2) $\frac{\left(\frac{-2}{5}\right)\times\left(\frac{5}{-7}\right)}{\left(\frac{-4}{-9}\right)\times\frac{3}{4}}$ ، $\frac{\left(\frac{21}{-18}\right)\times\left(\frac{7}{-4}\right)}{\left(\frac{-8}{9}\right)\times\left(\frac{-12}{5}\right)}$ ، $\frac{\frac{18}{75}\times\frac{24}{36}}{\frac{16}{25}\times\frac{4}{9}}$.

12 الـدائـــرة

مراجعة وتتمات

تعاريف وخواص :

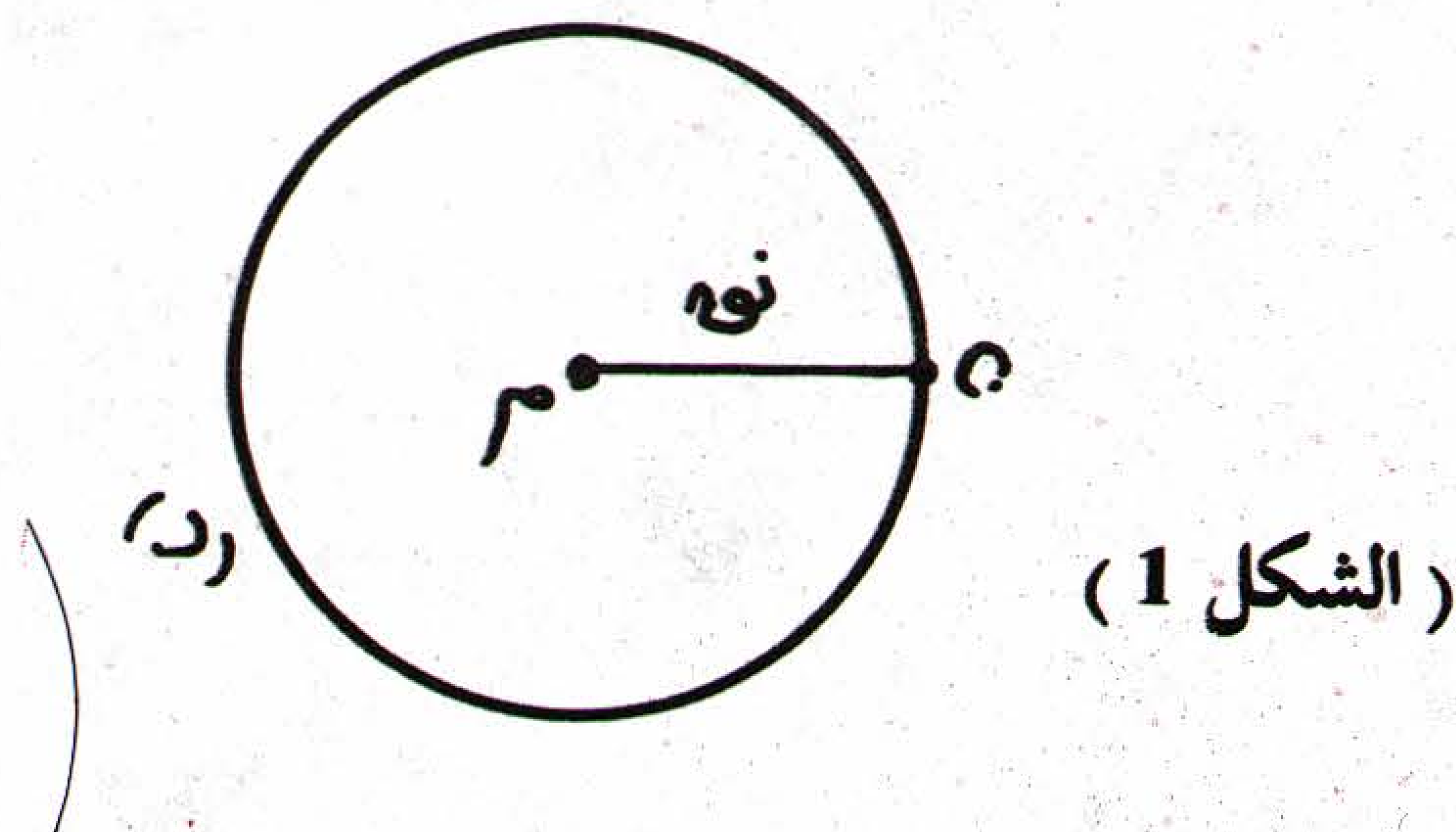
ـ الدائرة :

الدائرة هي مجموعة النقط ن من المستوي (ى) المتساوية المسافة عن نقطة ثابتة م تسمى المركز ، وهذه المسافة تسمى نصف القطر .

نرمز لهذه الدائرة بالرمز د (م ، نق) . حيث نق هو المسافة م ن . (الشكل 1) .

ونكتب : د (م ، نق) = { ن / ن ∈ (ى) و م ن = نق } .

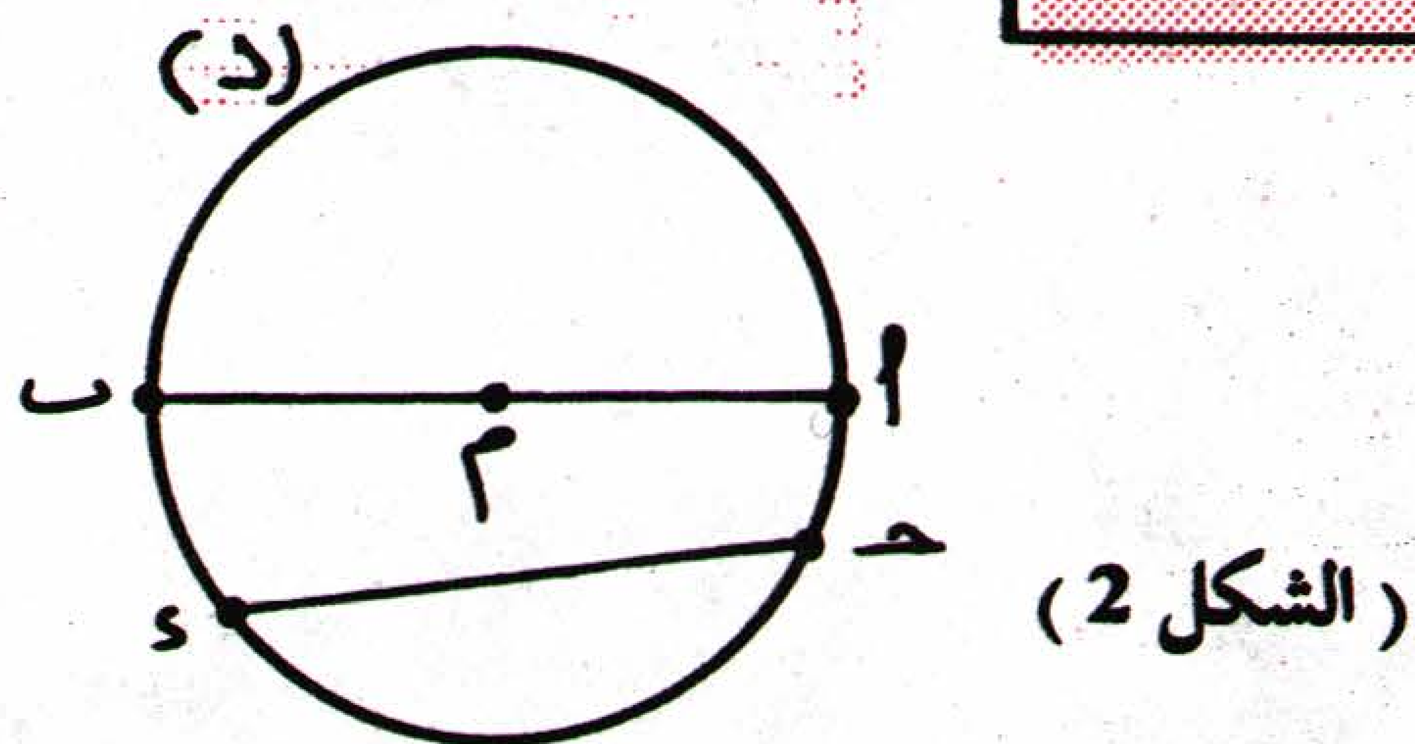
الوتر ـ القطر :



(الشكل 1)

وتر دائرة هو قطعة مستقيمة طرفاها نقطتان من هذه الدائرة

القطر في دائرة هو وتر يشمل مركزها .



(الشكل 2)

• في (الشكل 2) لدينا :

[حـ ى] وتر للدائرة (د)

[أ ب] قطر لها .

بيّن أن القطر في دائرة هو أطول وتر فيها .

أقواس دائرة :

• د (م ؛ نق) دائرة ؛ ا ، ب نقطتان منها (الشكل 3)

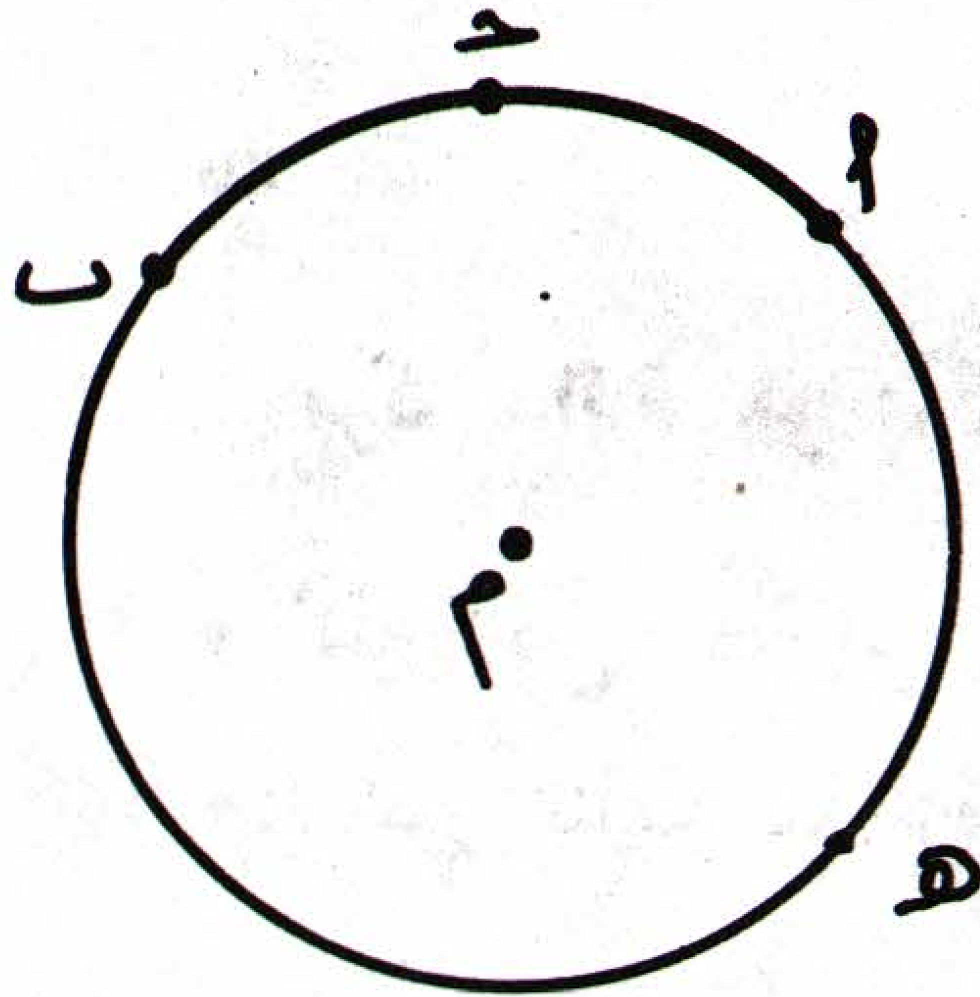
• النقطتان ا ، ب تعينان جزئين من هذه الدائرة كل منهما يسمى **قوسًا** .

ـ القوس الذي يشمل النقطة حـ نرمز إليه بالرمز $\overset{\frown}{اب}$.

ـ والقوس الذي يشمل النقطة هـ نرمز إليه بالرمز $\underset{\smile}{اب}$.

• نقول إنّ الوتر [اب] **يشدّ** كلاً من القوسين $\overset{\frown}{اب}$ ، $\underset{\smile}{اب}$.

• وإن كلاً من القوسين $\overset{\frown}{اب}$ ، $\underset{\smile}{اب}$ **تحصر** الوتر [اب] .



(الشكل 3)

داخل دائرة وخارجها :

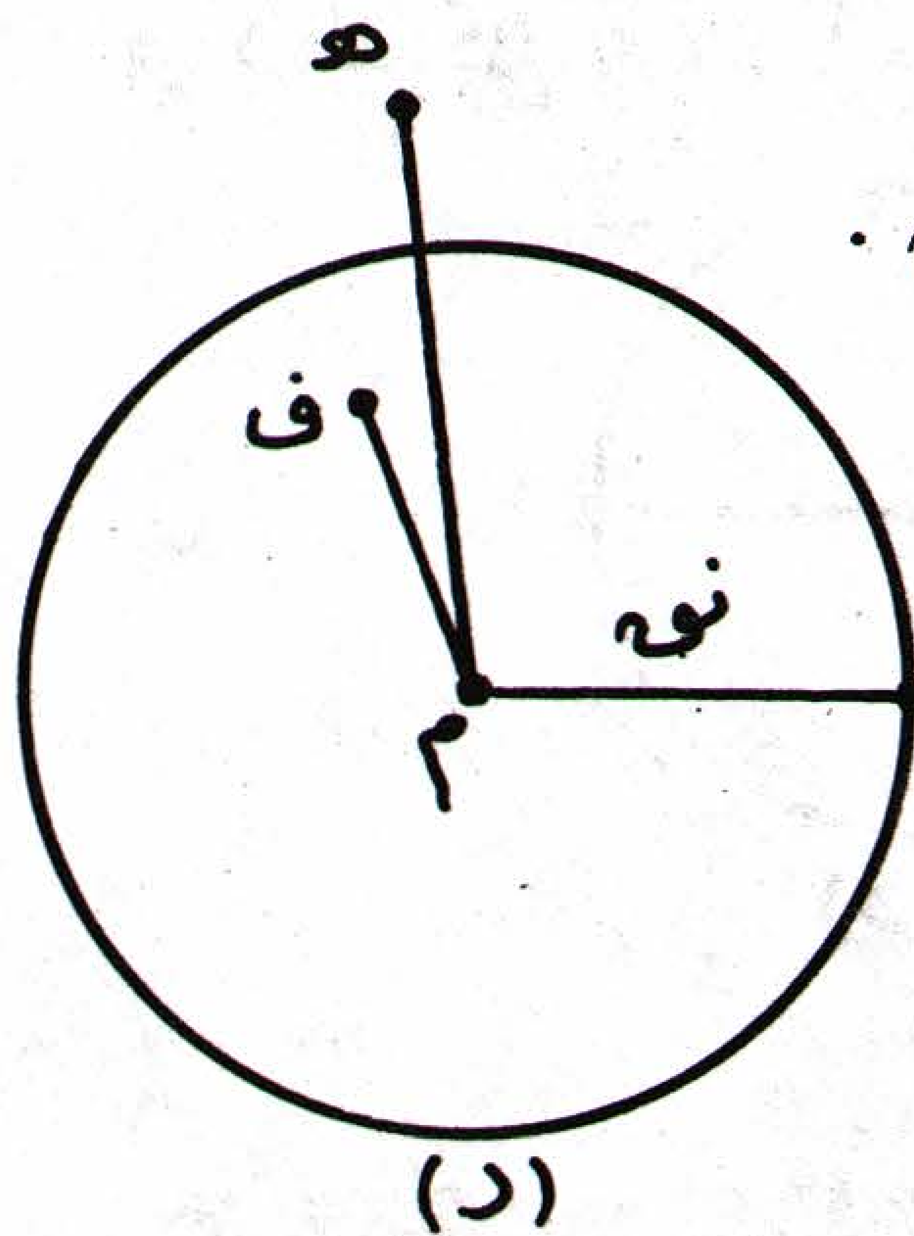
د (م ، نق) دائرة (الشكل 4)

• مجموعة النقط ف من المستوي (ى) حيث م ف < نق تسمى **داخل الدائرة** (د) .

• مجموعة النقط ن من المستوي(ى) ، حيث م ن ⩽ نق هو **القرص** الذي مركزه م ونصف قطره نق .

• مجموعة النقط هـ من المستوي (ى)

حيث م هـ > نق تسمى **خارج الدائرة** (د) .

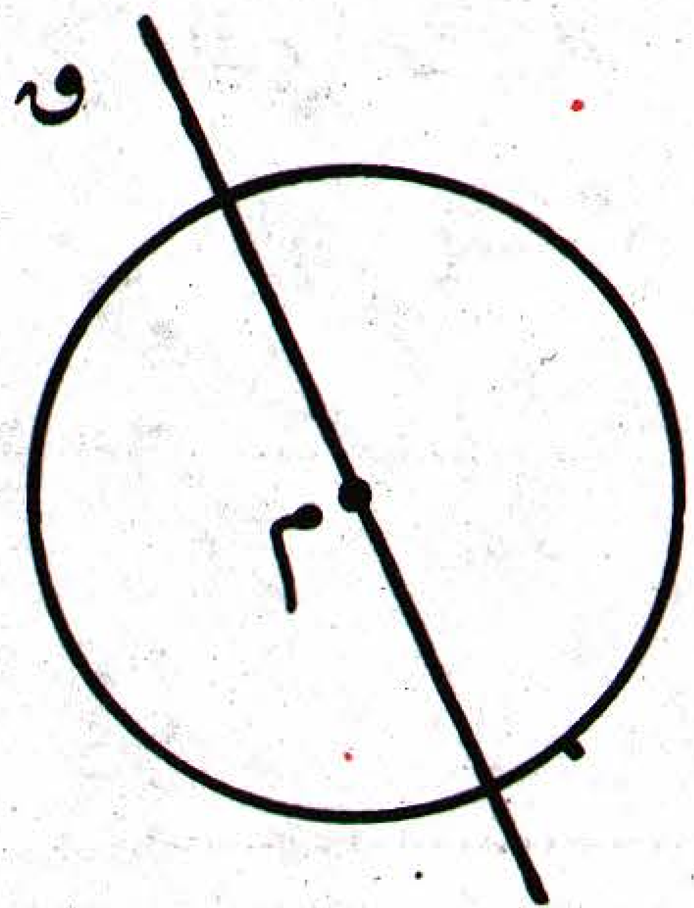


(الشكل 4)

خواص مركز وقطر دائرة :

ـ د (م ، ں) دائرة ، (ﻫ) مستقيم قطري . (الشكل 5)

• نظيرة كل نقطة من (د) بالنسبة إلى المركز م هي نقطة من (د) فالنقطة م هي مركز تناظر للدائرة (د) .



(الشكل 5)

نظرية :

مركز دائرة هو مركز تناظر لها .

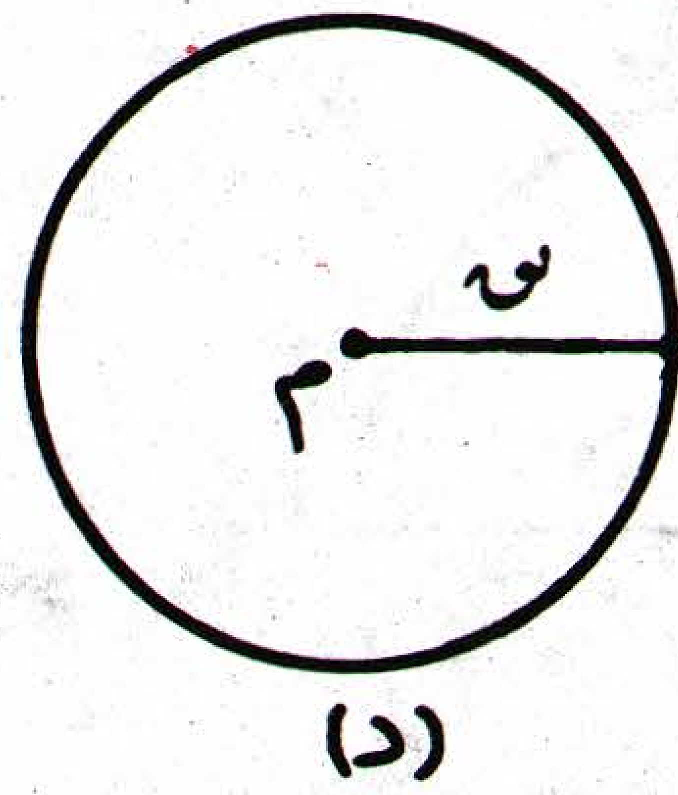
• نظيرة كل نقطة من (د) بالنسبة إلى (ﻫ) هي نقطة من (د) . فالمستقيم (ﻫ) هو محور تناظر للدائرة (د) .

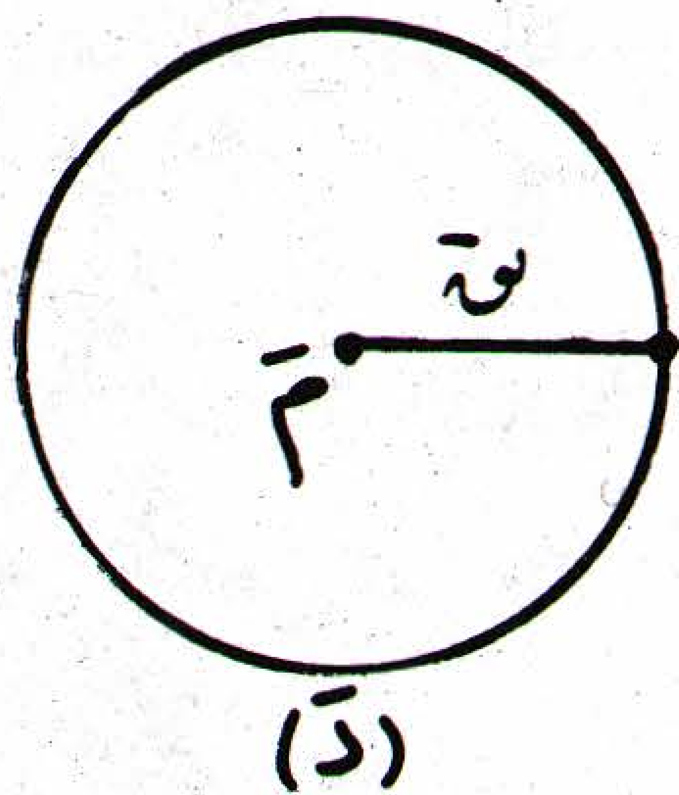
نظرية :

كل مستقيم قطري لدائرة هو محور تناظر لها .

الدوائر المتقايسة ـ الأقواس المتقايسة :

في (الشكل 6) د (م ، ں) و د (مَ ، ںَ) دائرتان متقايستان ومنه ں = ںَ .

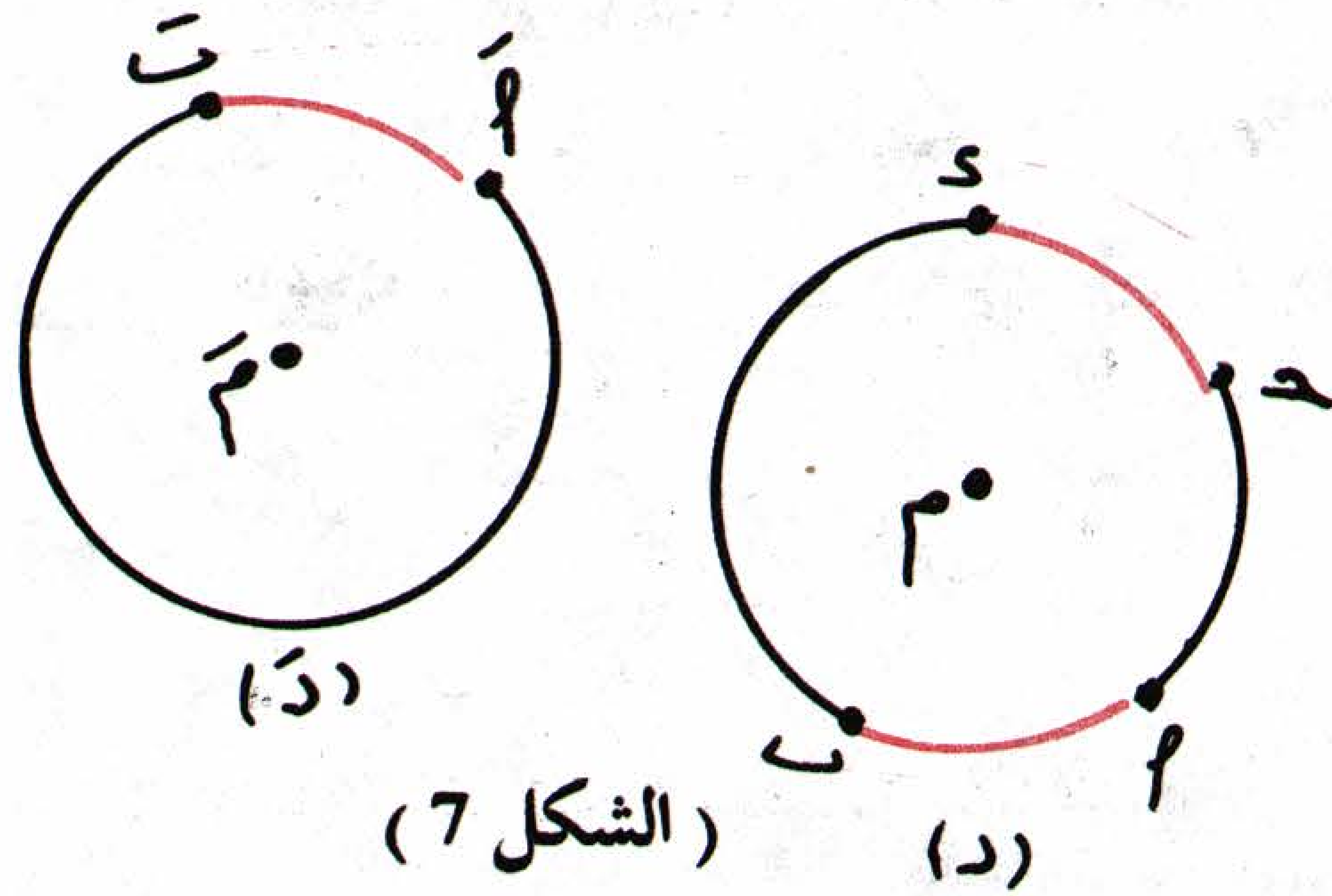




(الشكل 6)

د (م ، ں) و دَ (مَ ، ںَ) دائرتان متقايستان معناه ں = ںَ

القوسان المتقايستان من نفس الدائرة أو من دائرتين متقايستين هما قوسان قابلتان للتطابق .



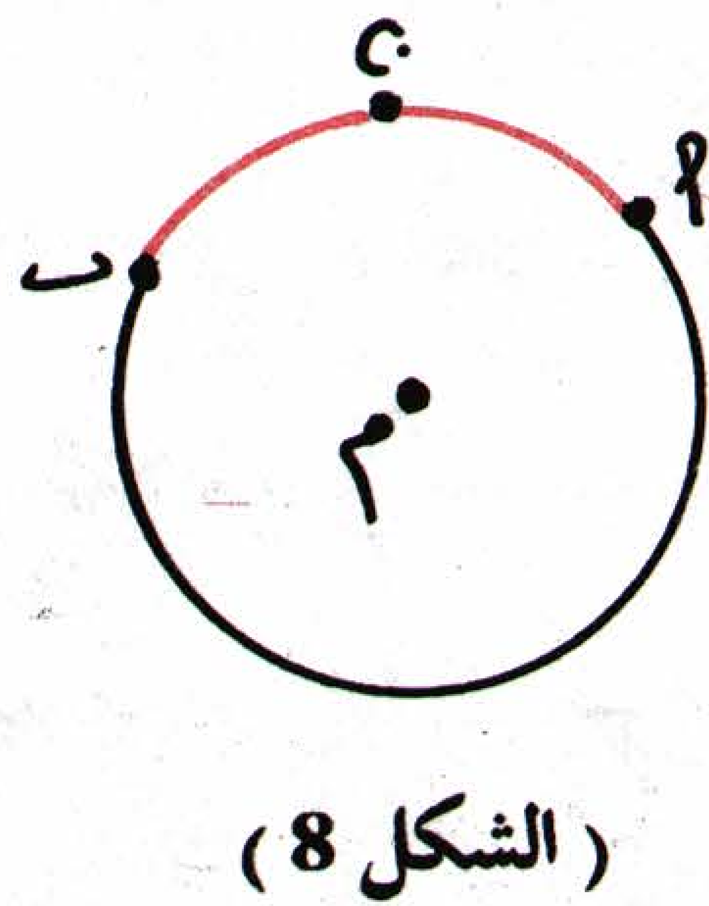
(الشكل 7)

(د) و (دَ) متقايستان (الشكل 7)

لدينا : ⌒أب ، ⌒حـى قوسان متقايستان من الدائرة (د) .

والأقواس ⌒أَبَ ، ⌒أب ، ⌒حـى قابلة للتطابق ، فهي متقايسة .

منتصف قوس :



(الشكل 8)

منتصف القوس ⌒أب هو النقطة ن منها بحيث تكون ⌒أن ، ⌒نب متجاورتين ومتقايستين .

الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة

1. تعاريف :

(د) دائرة و (ق) مستقيم . لاحظ الأشكال الآتية :

(الشكل 11)	(الشكل 10)	(الشكل 9)
$(\text{ق}) \cap (\text{د}) = \phi$	$(\text{ق}) \cap (\text{د}) = \{\text{أ}\}$	$(\text{ق}) \cap (\text{د}) = \{\text{أ} ، \text{ب}\}$

ـ في الشكل (9) المجموعة (ق) ∩ (د) تشمل نقطتين ؛ نقول إن المستقيم (ق) **قاطع للدائرة** (د) .

ـ في الشكل (10) المجموعة (ق) ∩ (د) تشمل نقطة واحدة ؛ فنقول إنّ المستقيم (ق) **مماس للدائرة** (د) وإن النقطة أ هي **نقطة التماس** .

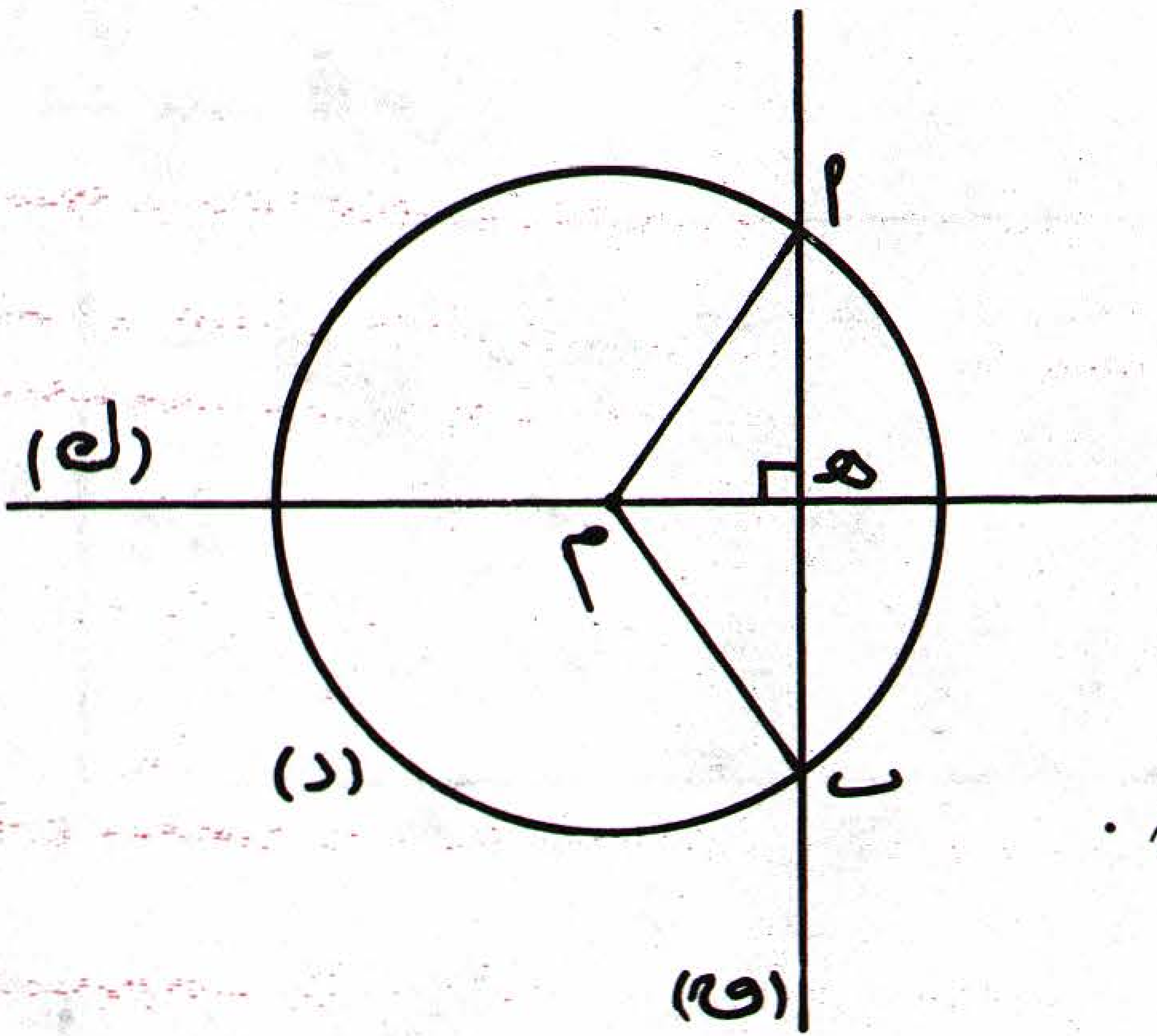
ـ في الشكل (11) المجموعة (ق) ∩ (د) خالية ؛ فنقول إن المستقيم (ق) **خارجي** بالنسبة إلى (د) .

2. خواص :

ا) خاصة القاطع :

مسألة : د (م ، ر) دائرة و (ق) قاطع لها في النقطتين أ ، ب .

ـ لنبرهن على أن المسافة بين النقطة م والمستقيم (ق) أصغر من نصف القطر ر .



« الشكل 12 »

البرهان :

ـ نرسم المستقيم القطري (ك) الذي يعامد (ق) في النقطة هـ . فيكون :
في المثلث م أ هـ القائم في هـ ، الوتر [م أ] هو أطول ضلع فيه
إذن م هـ < م أ . ولدينا م أ = ر .
نستنتج أن م هـ < ر .
ونعلمُ أنَّ م هـ هي المسافة بين م والمستقيم (ق) .

نظرية :

إذا قطع مستقيم دائرة فإن المسافة بين مركز الدائرة وهذا المستقيم أصغر من نصف القطر.

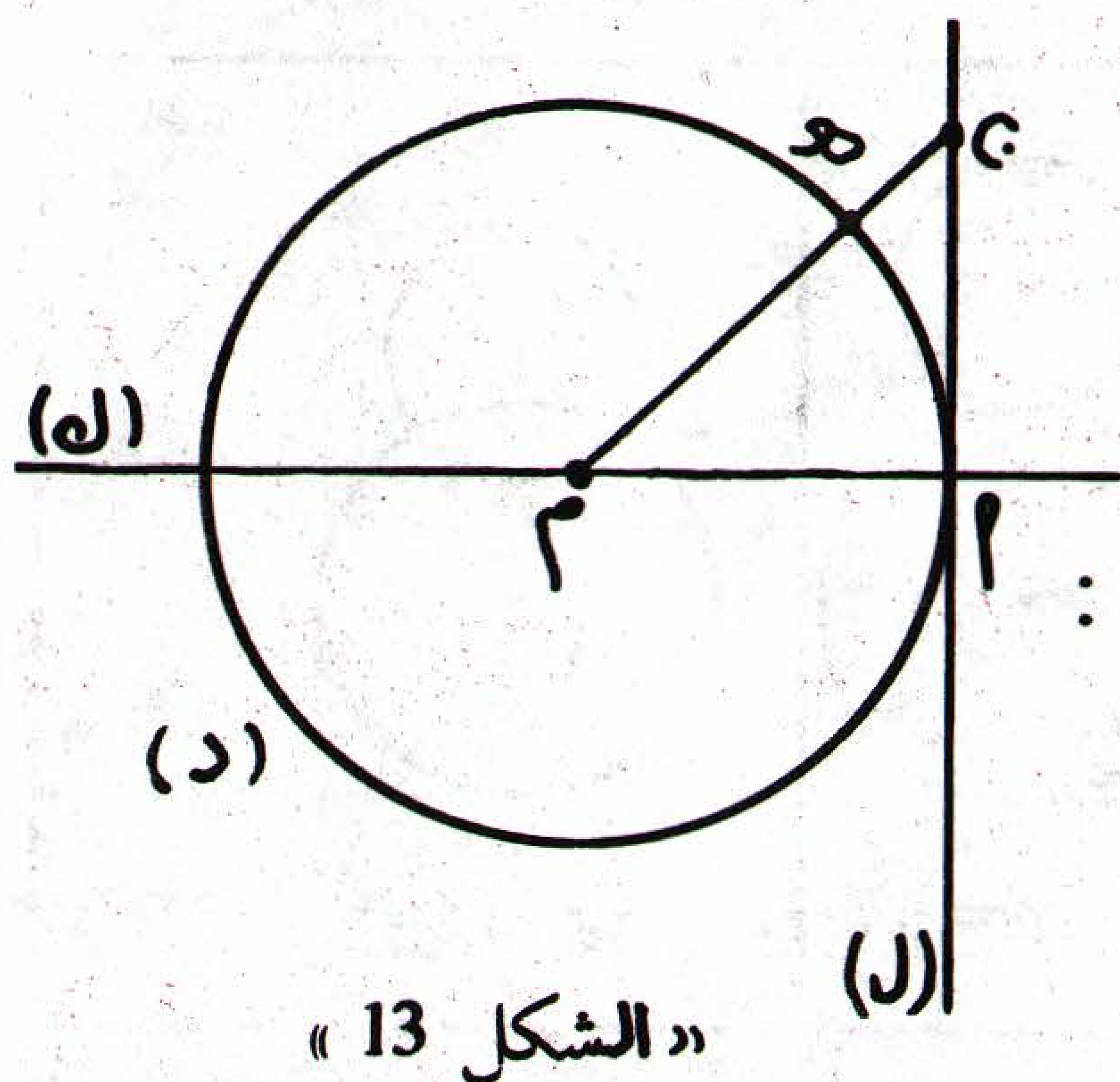
د (م ، نق) دائرة ، [اب] وتر لها حيث م ∉ [اب] . (م هـ) مستقيم عمودي على (اب) في هـ . ـ برهن على أن (م هـ) محور للوتر [اب] .

ب) خاصة المماس :

مسألة :

د (م ، نق) دائرة ، (ل) مماس لها في النقطة ا

ـ لنبرهن على أن المستقيم القطري (ك) الذي يشمل نقطة التماس عمودي على المماس في هذه النقطة .



« الشكل 13 »

البرهان :

ـ نختار نقطة ن من (ل) تختلف عن ا ونضع :

[م ن] ∩ (د) = { هـ } . (الشكل 13)

هـ ∈ (د) معناه م هـ = م ا = نق .

م ن = م هـ + هـ ن أي م ن = نق + هـ ن .

إذن م ن > نق وهذا يعني أن النقطة ن تقع خارج الدائرة (د) .

فمن أجل كل نقطة ن من (ل) تختلف عن ا يكون م ن > نق ،

أي م ن > م ا .

هذا يعني أن م ا هو أصغر مسافة بين النقطة م وأي نقطة من (ل) تختلف عن ا .

إذن م ا هو المسافة بين النقطة م والمستقيم (ل) .

نستنتج من ذلك أن (م ا) ⊥ (ل) .

نظرية :

المستقيم القطري الذي يشمل نقطة التماس عمودي على المماس في هذه النقطة .

ـ نقبل **النظرية** الآتية :

إذا كانت أ نقطة من دائرة (د) وكان (ق) مستقيما عموديا في أ على المستقيم القطري الذي يشمل أ ، فإن المستقيم (ق) مماس للدائرة (د) في النقطة أ .

الوضع النسبي لدائرتين

1. تعاريف :

د (م ، ر) ، دَ (مَ ، رَ) دائرتان .

لاحظ الأشكال الآتية :

(الشكل 14)	(الشكل 15)	(الشكل 16)	(الشكل 17)	(الشكل 18)
(د) ∩ (دَ) = { أ ، ب }	(د) ∩ (دَ) = { أ }		(د) ∩ (دَ) = ∅	

• في الشكل (14) الدائرتان مشتركتان في نقطتين أ ، ب .
فنقول إن الدائرتين **متقاطعتان** . أ ، ب هما نقطتا التقاطع .

• في كل من الشكلين (15 و 16) الدائرتان (د) و (دَ) مشتركتان في نقطة واحدة .

نقول إن الدائرتين **متماستان** . أ هي **نقطة التماس** .

- في الشكل (15) الدائرتان (د) و (د′) **متماستان خارجيا** .
- في الشكل (16) الدائرتان (د) و (د′) **متماستان داخليا** .
- في كل من الشكلين (17) و (18) الدائرتان (د) و (د′) غير مشتركتين في أية نقطة . فنقول إن الدائرتين **منفصلتان** .
- في الشكل (18) الدائرتان (د′) و (د) **منفصلتان داخليا** .
- وفي الشكل (17) الدائرتان (د) و (د′) **منفصلتان خارجيا** .

2. خواص :

- **مسألة :**

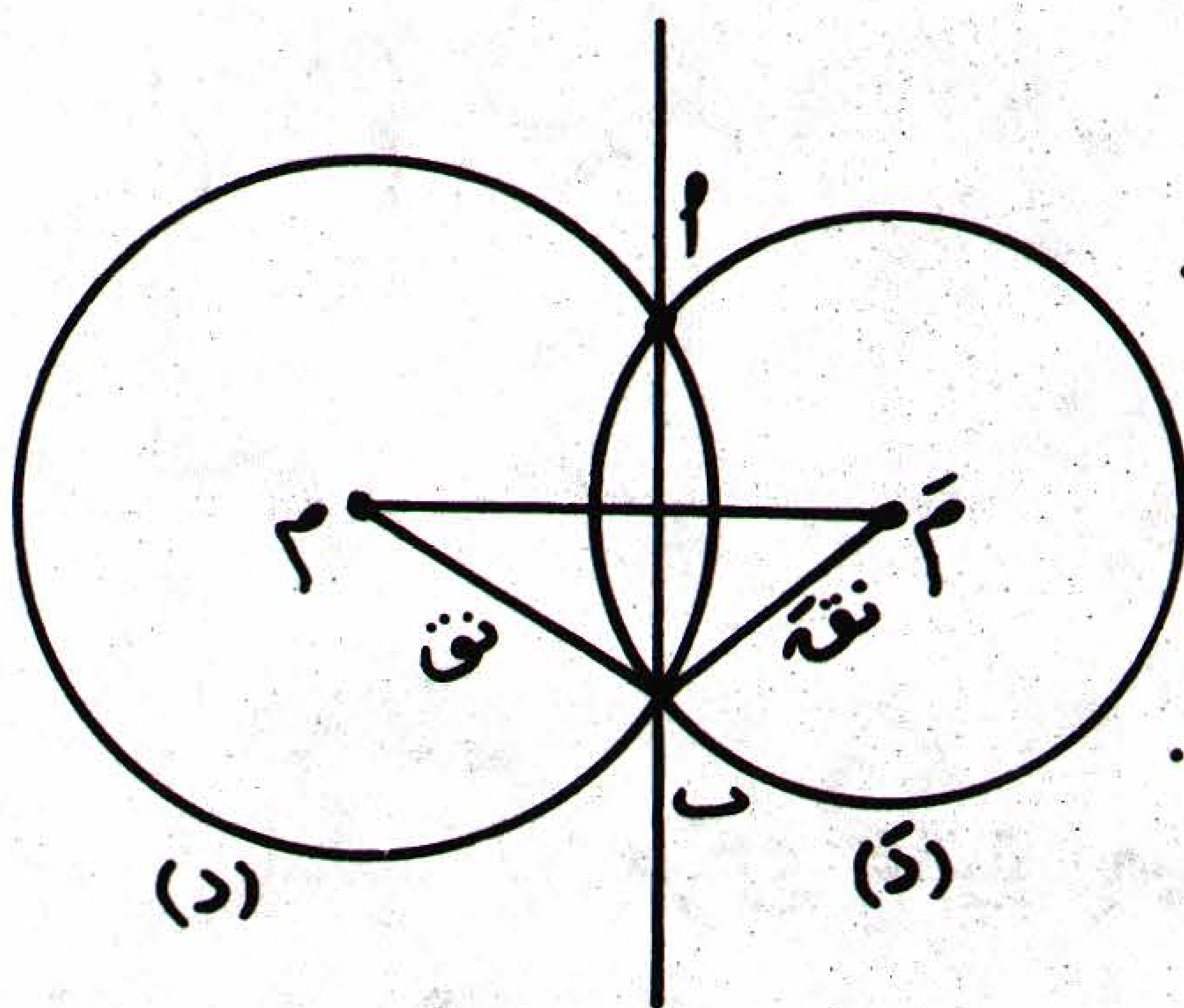
د (م ، نق) و د′ (م′ ، نق′) دائرتان متقاطعتان في النقطتين أ ، ب (الشكل19)

ـ لنبرهن أن :

1) المستقيم (م م′) هو محور [أ ب]

2) م م′ < نق + نق′

البرهان :



(الشكل 19)

[أ ب] وتر مشترك للدائرتين (د) و (د′) .

و :

م أ = م ب إذن م تنتمي إلى محور [أ ب] .

م′ أ = م′ ب إذن م′ تنتمي إلى محور [أ ب] .

نستنتج أن (م م′) هو محور [أ ب] .

2) في المثلث م ب مَ لدينا م مَ < م ب + مَ ب .

أي م مَ < ر + رَ

نظرية :

المستقيم الذي يشمل مركزي دائرتين متقاطعتين هو محور الوتر المشترك لهما ، والمسافة بين مركزي هاتين الدائرتين أصغر من مجموع نصفي قطريهما .

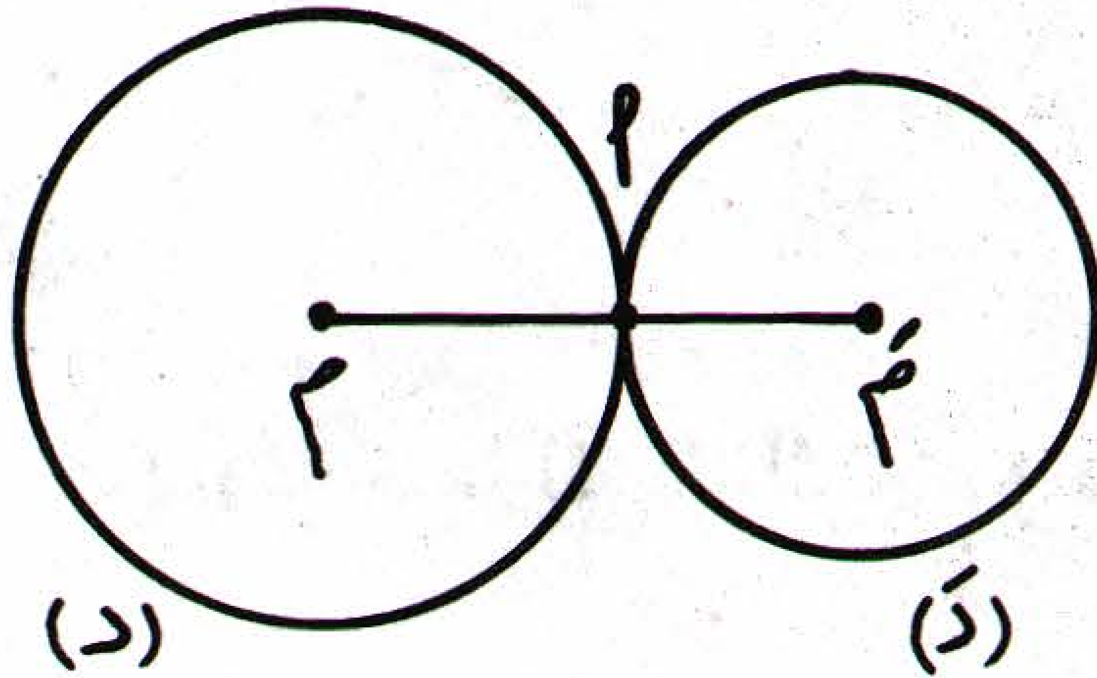
ملاحظة : المستقيم (م مَ) هو محور تناظر للشكل (19) .

• د (م ، ر) ، دَ (مَ ، رَ) دائرتان متماستان خارجيا في النقطة أ (الشكل 20)

ـ نقبل أن النقاط م ، أ ، مَ هي على استقامة واحدة .

فيكون : م مَ = م أ + أ مَ

أي : م مَ = ر + رَ



(الشكل 20)

نتيجة :

المسافة بين مركزي دائرتين متماستين خارجيا تساوي مجموع نصفي قطري هاتين الدائرتين .

ملاحظة :

ـ في (الشكل 16) الدائرتان د (م ، ىه) و د′ (م′ ، ىه′) متماستان داخليا إذن يمكن البرهان على أن :

م م′ = ىه − ىه′ .

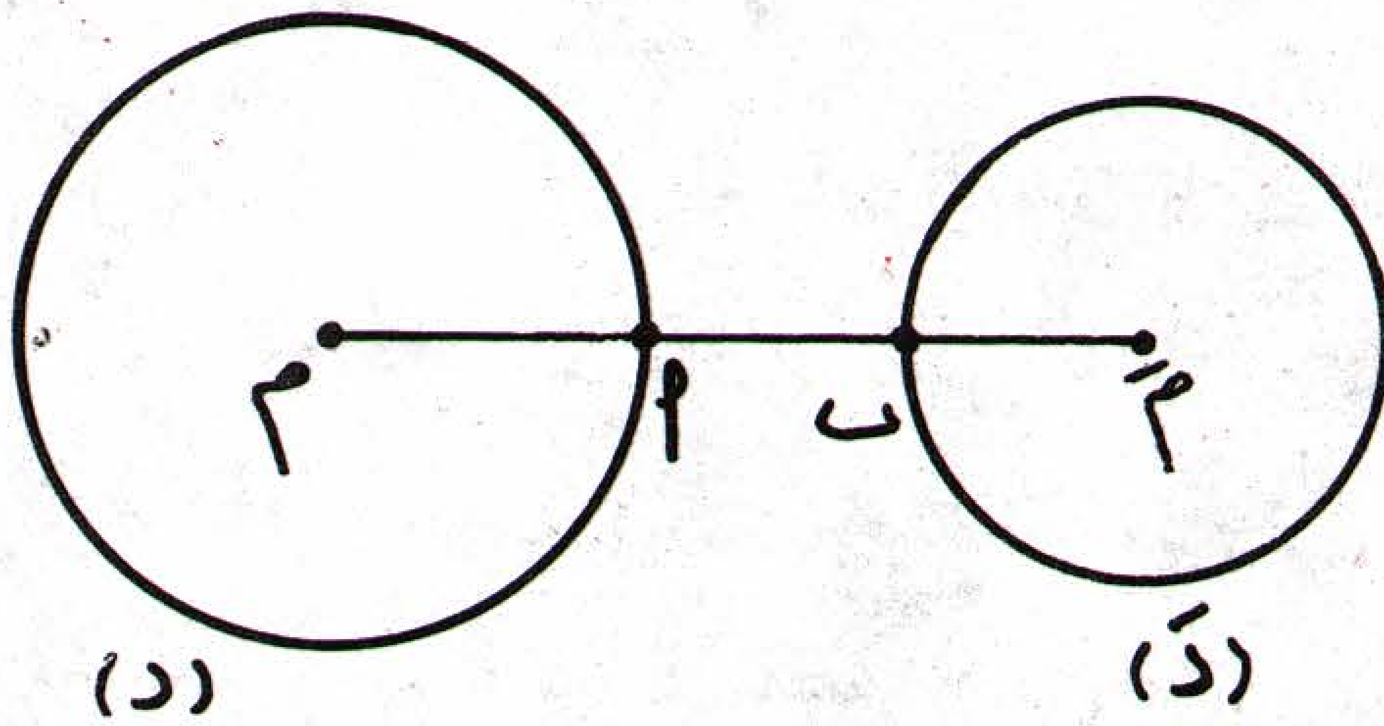
• د (م ، ىه) و د′ (م′ ، ىه′) دائرتان منفصلتان خارجيا . (الشكل 21)

ـ نرسم القطعة المستقيمة [م م′] فتقطع (د) و (د′) في النقطتين أ ، ب على الترتيب .

لدينا : م م′ = م أ + أ ب + ب م′ .

نستنتج أن : م م′ > م أ + ب م′ .

أي : م م′ > ىه + ىه′



« الشكل 21 »

نتيجة :

المسافة بين مركزي دائرتين منفصلتين خارجيا أكبر من مجموع نصفي قطريهما .

ملاحظة :

ـ في (الشكل 18) د (م ، ىه) و د′ (م′ ، ىه′) دائرتان منفصلتان داخليا حيث ىه > ىه′ . فيمكن البرهان على أن :

م م′ < ىه − ىه′

التمارين

1. د (م ، ن) دائرة ، [اب] قطر لها ، ح نظيرة م بالنسبة إلى ب ، (Δ) مستقيم يشمل ح ويمس الدائرة (د) في هـ .
   1) برهن على أن هـ ب م = $60°$.
   2) برهن على أن هـ ا = هـ ح .

2. ا ب ح مثلث قائم في ا ، (د) دائرة مركزها ب ونصف قطرها ا ب .
   (د′) دائرة مركزها ح ونصف قطرها ح ا .
   1) أثبت أن المستقيم (ا ح) يمس الدائرة (د) في النقطة ا وأن المستقيم (ا ب) يمس الدائرة (د′) في النقطة ا .
   2) بيّن أن (ب ح) يقطع (د′) وأن النقط ا ، ب ، ح تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها .

3. د (م ، ن) دائرة ، (Δ) مماس لها في النقطة ا .
   ب ، ح نقطتان من (Δ) بحيث ا منتصف [ب ح] .
   د′ (ب ، ا ب) دائرة تقطع (د) في نقطة أخرى ﻫ .
   د″ (ح ، ح ا) دائرة تقطع (د) في نقطة أخرى هـ .
   1) برهن على أن (م ا) مماس للدائرتين (د′) و (د″) في ا .
   2) برهن على أن المثلثين ب ا م ، ب ﻫ م متقايسان . وأن المثلثين ح ا م ، ح هـ م متقايسان .
   واستنتج أن (ب ﻫ) ، (ح هـ) يمسان الدائرة د (م ، ن) في النقطتين ﻫ ، هـ على الترتيب .

4. د (م ، ن) دائرة ، [ا ب] وتر لها ، المستقيم (ق) العمودي على (ا ب) والذي يشمل م يقطع الدائرة (د) في النقطتين ح ، ى .
   ـ برهن أن المثلثين ح ا ى ، ح ب ى متقايسان .

5. د (م ، ن) دائرة . [ا ب] قطر لها ؛ [ا ح] و [ب ى] وتران لهذه الدائرة حاملاهما متوازيان .
   1) برهن على أن ا ح = ب ى .
   3) برهن على أن [ى ح] قطر للدائرة (د) .
   2) ما نوع الرباعي ا ح ب ى ؟

13 الجمع والطرح في ك المجموع الجبري - الجداءات الشهيرة

الجمع في ك

1. مجموع عددين ناطقين :

تعريف :

مجموع العددين الناطقين $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ و $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ هو العدد الناطق $\frac{\text{أد} + \text{ب جـ}}{\text{ب د}}$

نكتب $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أد} + \text{ب جـ}}{\text{ب د}}$

ملاحظة :

- يمكن حساب مجموع العددين الناطقين $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ كما يلي :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}}$$

أمثلة :

1) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{4 \times 3 + 5 \times 2}{5 \times 3} = \frac{22}{15}$.

إن العدد الناطق $\frac{22}{15}$ هو **مجموع** العددين الناطقين $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{5}$.

(2 $\frac{5-}{6} + \frac{3}{7} = \frac{(5-) \times 7 + 6 \times 3}{6 \times 7} = \frac{17-}{42}$.

(3 $\left(\frac{9}{8}-\right) + (5-) = \frac{9-}{8} + \frac{5-}{1} = \frac{(9-) \times 1 + 8 \times (5-)}{8 \times 1} = \frac{49-}{8}$.

2. الجمع في ك :

نلاحظ أنه يمكن أن نرفق كل ثنائية مرتبة $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} ، \frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right)$ من ك × ك بالعدد الناطق $\frac{\text{أ د} + \text{ب جـ}}{\text{ب د}}$ مجموع العددين الناطقين $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ و $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$. وبذلك نعرف تطبيقًا من ك × ك إلى ك .

تعريف :

التطبيق من ك × ك إلى ك الذي يرفق كل ثنائية مرتبة $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} ، \frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right)$ بالعدد الناطق $\frac{\text{أ د} + \text{ب جـ}}{\text{ب د}}$ مجموع العددين الناطقين $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ يسمى **عملية الجمع** في ك .

نكتب :

ك × ك ⟵ ك

$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} ، \frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right) \longmapsto \frac{\text{أ د} + \text{ب جـ}}{\text{ب د}}$.

احسُب كلاًّ من المجاميع الآتية :

$\left(+\frac{3}{11}\right)+\left(+\frac{12}{27}\right)$ ؛ $\left(-\frac{5}{9}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$ ؛ $\frac{18}{32}+\frac{1}{3}$ ؛

$\left(-\frac{2}{9}\right)+0{,}3$ ؛ $(-6)+\frac{1}{10}$ ؛ $\frac{24}{72}+\left(-\frac{7}{2}\right)$

$\left(-\frac{38}{44}\right)+\left(-\frac{35}{42}\right)$ ؛ $\frac{1}{4}+0{,}75$.

3. خواص الجمع في ك :

1) التبديل :

ـ أكمل الجدول الآتي :

س	ع	س + ع	ع + س
$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{4}$		
$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{6}$		
$-\frac{7}{9}$	$-\frac{7}{8}$		

تجد في كل حالة أن **س + ع = ع + س**

نتيجة :

مهما يكن العددان الناطقان س ، ع فإن :
س + ع = ع + س .

نقول إن **الجمع** في ك عملية **تبديلية** .

2) التجميع :

ـ أكمل الجدول الآتي :

س	ع	ص	(س + ع) + ص	س + (ع + ص)
$\frac{2}{5}$	$\frac{-7}{2}$	$\frac{3}{-4}$		
$-\frac{5}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{5}{6}$	2	$\frac{1}{3}$		

نجد في كل حالة أن (س + ع) + ص = س + (ع + ص)

نتيجة :

مهما تكن الأعداد الناطقة س ، ع ، ص فإن :
(س + ع) + ص = س + (ع + ص)

نقول إن الجمع في ك عملية **تجميعية**

ملاحظة :

س + ع + ص = (س + ع) + ص = س + (ع + ص) .

لاحظ من خلال هذه المساوايات أنه يمكن **وضع** الأقواس أو **حذفها**.

3) احسُب ما يلي : $\frac{2}{5}+0$ ؛ $0+\left(-\frac{1}{3}\right)$ ؛ $0+3{,}5$.

نتيجة :

مهما يكن العدد الناطق س فإن :
س + 0 = 0 + س = س

نقول إنّ العدد الناطق 0 هو **العنصر الحيادي** بالنسبة إلى عملية الجمع في ك .

4) نظير عدد ناطق بالنسبة إلى عملية الجمع في ك :

احسُب كلاًّ من المجاميع الآتية :

$\frac{3}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)$ ؛ $\left(-\frac{1}{4}\right)+0{,}25$ ؛ $\frac{9}{7}+\left(-\frac{9}{7}\right)$.

تجد في كل حالة أنّ المجموع معدوم أي أنه يساوي العنصر الحيادي بالنسبة إلى عملية الجمع في ك .

نتيجة :

لكل عدد ناطق $\frac{أ}{ب}$ نظير بالنسبة إلى عملية الجمع في ك هو $-\frac{أ}{ب}$

نقول إن العدد الناطق $\left(-\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)$ هو **نظير** العدد الناطق $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

$\left(-\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)$ يسمى أيضا **معاكس** $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

5) توزيع الضرب على الجمع في ك :

ـ أكمل الجدول الآتي :

س	ع	ص	س . (ع + ص)	س . ع + س . ص
$\frac{13}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{5}$		
$-\frac{11}{9}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{7}$		
$-\frac{8}{9}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{9}{7}$		

تجد في كل حالة أن **س . (ع + ص) = س . ع + س . ص**

نتيجة :

مهما تكن الأعداد الناطقة س ، ع ، ص فإن :
س . (ع + ص) = س . ع + س . ص

4. المساواة والجمع :

مثال :

تعلم أنّ الكسرين $\frac{15}{18}$ ، $\frac{45}{54}$ يمثلان نفس العدد الناطق أي أنّ $\frac{15}{18} = \frac{45}{54}$.

احسُب $\frac{15}{18} + \frac{7-}{3}$ و $\frac{45}{54} + \frac{7-}{3}$.

تجد $\frac{15}{18} + \frac{7-}{3} = \frac{45}{54} + \frac{7-}{3}$.

وبصفة عامة يمكن البرهان على ما يلي :

نظرية :

س ، ع ، ص أعداد ناطقة .
إذا كان س = ع **فإن** س + ص = ع + ص .

• برهن على النظرية الآتية :

إذا كان س + ص = ع + ص فإن س = ع .

الطرح في ك

1. فرق عددين ناطقين :

مسألة :

ـ هل يوجد عدد ناطق س ، بحيث : $س + \frac{2}{7} = \frac{3}{5}$ ؟

نعلم أنه إذا كان $س + \frac{2}{7} = \frac{3}{5}$ فإن

$$\left(س + \frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{5} + \left(-\frac{2}{7}\right) .$$

وبما أن الجمع في ك تجميعي فإن :

$$س + \left[\frac{2}{7} + \left(-\frac{2}{7}\right)\right] = \frac{3}{5} + \left(-\frac{2}{7}\right) .$$

وتعلم أن $\frac{2}{7} + \left(-\frac{2}{7}\right) = 0$

نستنتج أن : $س = \frac{3}{5} + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{3 \times 7 + (-2) \times 5}{5 \times 7}$

$$س = \frac{3 \times 7 - 2 \times 5}{5 \times 7} = \frac{11}{35} .$$

العدد الناطق $س = \frac{3}{5} + \left(-\frac{2}{7}\right)$ يسمى **فرق العددين الناطقين**

$\frac{3}{5}$ و $\left(\frac{-2}{7}\right)$. نرمز له بالرمز $\frac{3}{5} - \frac{2}{7}$.

ونكتب $\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{3}{5} + \left(\frac{-2}{7}\right)$

لاحظ أن هذا الفرق هو مجموع العدد الأول ومعاكس العدد الثاني .

نكتب $\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{11}{35}$.

يمكن أن نتحقق أن $\frac{11}{35} + \frac{2}{7} = \frac{3}{5}$.

إنّ العدد $\frac{11}{35}$ هو العدد الناطق الوحيد ، بحيث :

س $+ \frac{2}{7} = \frac{3}{5}$.

تعريف :

فرق العددين الناطقين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ح}{ء}$ هو العدد الناطق $\frac{أ}{ب} + \left(\frac{-ح}{ء}\right)$

أي $\frac{أ . ء - ب . ح}{ب . ء}$

نكتب $\frac{أ}{ب} - \frac{ح}{ء} = \frac{أ ء - ب ح}{ب ء}$

ملاحظة :

يمكن حساب فرق العددين الناطقين $\frac{أ}{ب}$ و $\frac{حـ}{ب}$ على الترتيب كما يلي :

$$\frac{أ}{ب} - \frac{حـ}{ب} = \frac{أ - حـ}{ب}$$

أمثلة :

1) $\frac{7}{9} - \frac{3}{2} = \frac{7 \times 2 - 9 \times 3}{9 \times 2} = \frac{-13}{18}$.

2) $\left(\frac{-1}{3}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{1-}{3}\right) - \left(\frac{1-}{2}\right)$

$\left(\frac{-1}{3}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{(-1) \times 2 - 3 \times (-1)}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$.

2. الطرح في ك :

نلاحظ أنه يمكن أن نرفق كل ثنائية مرتبة $\left(\frac{أ}{ب} ، \frac{حـ}{ء}\right)$

من ك × ك بالعدد الناطق $\frac{أء - بحـ}{بء}$ فرق العددين $\frac{أ}{ب}$ و $\frac{حـ}{ء}$

على الترتيب ، فنعرف بذلك تطبيقا من ك × ك إلى ك .

تعريف :

التطبيق من ك × ك إلى ك الذي يرفق كل ثنائية مرتبة $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} ، \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}\right)$ بالعدد الناطق $\frac{\text{أء} - \text{ب حـ}}{\text{ب ء}}$ فرق $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ و $\frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ على الترتيب يسمى **عملية الطرح في ك**

نكتب ك × ك ← ك .

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}} ، \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}\right) \longmapsto \frac{\text{أء} - \text{ب حـ}}{\text{ب ء}} .$$

احسُب كلاًّ من الفروق الآتية :

$\frac{39}{27} - \frac{15}{18}$ ؛ $\left(-\frac{12}{33}\right) - \frac{1}{2}$ ؛ $\left(-\frac{9}{5}\right) - \left(-\frac{6}{15}\right)$ ؛

$\frac{1}{8} - 22$ ؛ $(-2) - \frac{32}{50}$ ؛ $\frac{3}{5} - \frac{7}{8}$.

- **توزيع الضرب على الطرح :**

ـ أكمل الجدول الآتي :

س	ع	ص	س . (ع − ص)	س . ع − س . ص
$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$		
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-4}{7}$		
$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{13}{3}$		

تجد في كل حالة أنّ س . (ع − ص) = س . ع − س . ص

نتيجة :

مهما تكن الأعداد الناطقة س ، ع ، ص فإن :

س . (ع − ص) = س . ع − س . ص

نقول إنَّ عملية الضرب في ك **توزيعية** بالنسبة إلى عملية الطرح في ك.

3. المساواة والطرح :

مثال :

تعلم أنّ الكسرين $\frac{-60}{75}$ و $\frac{-20}{25}$ يمثلان نفس العدد الناطق .

أي $\frac{-60}{75} = \frac{-20}{25}$

احسُب $\frac{-60}{75} - \frac{-4}{15}$ و $\frac{-20}{25} - \frac{-4}{15}$

تَجِدْ أنّ $\frac{-60}{75} - \frac{-4}{15} = \frac{-20}{25} - \frac{-4}{15}$

بصفة عامة يمكن أن نبرهن على ما يلي :

نظرية :

س ، ع ، ص أعداد ناطقة .

إذا كان س = ع فإن س − ص = ع − ص .

• برهن على النظرية الآتية :

س ، ع ، ص أعداد ناطقة .

إذا كان س − ص = ع − ص فإن س = ع .

المجموع الجبري ـ الجداءات الشهيرة

1. المجموع الجبري :

1) تعريف :

س، ع ، ص ، ف ، أعداد ناطقة .

كل من الكتابات : س + ع + ص + ف ، س − ع − ص + ف ، − س − ع + ص − ف تعبّر عن سلسلة عمليات جمع أو طرح في ك وتسمى **مجموعًا جبريا** .

كل عدد من مجموع جبري هو **حدّ** منه .

أمثلة :

كل من : $\frac{-12}{3}+\frac{-11}{4}-\frac{5}{6}+\frac{7}{-12}$ و $-\frac{7}{5}-8+\frac{13}{9}-\frac{15}{17}$

هو مجموع جبري في ك

2) حساب مجموع جبري :

مثال 1 : لنحسب المجموع الجبري ل $= -\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{2}{3}-\frac{7}{2}$.

لحساب ل يمكن أن نبدأ بتوحيد مقامات الكسور . $\frac{3}{4}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{7}{2}$.

نعلم أن م م أ (4 ، 6 ، 3 ، 2) = 12 .

فيكون ل $= -\frac{9}{12}+\frac{10}{12}-\frac{8}{12}-\frac{42}{12}$.

أي $ل = \dfrac{-9 + 10 - 8 - 42}{12}$

نجد : $ل = -\dfrac{49}{12}$

مثال 2 : (حذف أو وضع الأقواس) .

ـ لنحسُب كلاً من $\dfrac{3}{2} - \left(5 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{4}\right)$ و $\dfrac{3}{2} - 5 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{15}{4}$.

$\dfrac{3}{2} - \left(5 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{4}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{20 - 2 + 15}{4}$.

$\dfrac{3}{2} - \left(5 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{4}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{33}{4}$.

$\dfrac{3}{2} - \left(5 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{4}\right) = \dfrac{6}{4} - \dfrac{33}{4}$.

$\dfrac{3}{2} - \left(5 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{4}\right) = \dfrac{-27}{4}$.

ـ لحساب المجموع الجبري $\dfrac{3}{2} - 5 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{15}{4}$ نوحّد المقامات .

نجد $\dfrac{3}{2} - 5 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{15}{4} = \dfrac{6}{4} - \dfrac{20}{4} + \dfrac{2}{4} - \dfrac{15}{4}$.

فيكون $\dfrac{6}{4} - \dfrac{20}{4} + \dfrac{2}{4} - \dfrac{15}{4} = \dfrac{6 - 20 + 2 - 15}{4}$

أي $\frac{3}{2} - 5 + \frac{1}{2} - \frac{15}{4} = \frac{-27}{4}$.

نستنتج أنّ $\frac{3}{2} - \left(5 - \frac{1}{2} + \frac{15}{4}\right) = \frac{3}{2} - 5 + \frac{1}{2} - \frac{15}{14}$

لاحظ أنّنا حذفنا الأقواس وغيَّرنا إشارات ما بينهما .

بصفة عامة :

س ، ع ، ص ، ف ، ه أعداد ناطقة .

س − (ع − ص − ف + ه) = س − ع + ص + ف − ه

احسُب بطريقتين كلاً من :

$-\frac{2}{3} - \left(\frac{7}{5} + \frac{12}{8}\right)$ و $\frac{25}{4} - \left(8 - \frac{3}{2}\right) + \frac{2}{9}$.

2. النشر والتحليل إلى جداء عوامل :

مثال : س ، ع ، ص أعداد ناطقة ، لنحسُب الجداء :

(2س + 5ع) × (ص − $\frac{5}{9}$)

نضع ص − $\frac{5}{9}$ = ل .

فيكون (2س + 5ع) (ص − $\frac{5}{9}$) = (2س + 5ع) . ل

$$(2\text{س} + 5\text{ع})\left(\text{ص} - \frac{5}{9}\right) = 2\text{س} \,.\, \text{ل} + 5\text{ع} \,.\, \text{ل}$$

$$(2\text{س} + 5\text{ع})\left(\text{ص} - \frac{5}{9}\right) = 2\text{س}\left(\text{ص} - \frac{5}{9}\right) + 5\text{ع}\left(\text{ص} - \frac{5}{9}\right).$$

$$(2\text{س} + 5\text{ع})\left(\text{ص} - \frac{5}{9}\right) = 2\text{س ص} - \frac{10}{9}\text{س} + 5\text{ع ص} - \frac{25}{9}\text{ع}.$$

نقول إنّنا **نشرْنا** الجُداء $(2\text{س} + 5\text{ع})\left(\text{ص} - \frac{5}{9}\right)$.

• لنكتُب المجموع الجبري $2\text{س ص} - \frac{10}{9}\text{س} + 5\text{ع ص} - \frac{25}{9}\text{ع}$

على **شكل جُداء عاملين**.

لاحظ أنّ :

$$2\text{س ص} - \frac{10}{9}\text{س} + 5\text{ع ص} - \frac{25}{9}\text{ع} = \left(2\text{س} \,.\, \text{ص} - 2\text{س} \,.\, \frac{5}{9}\right)$$

$$+ \left(5\text{ع} \,.\, \text{ص} - 5\text{ع} \,.\, \frac{5}{9}\right).$$

أي

$$2\text{س ص} - \frac{10}{9}\text{س} + 5\text{ع ص} - \frac{25}{9}\text{ع} = 2\text{س}\left(\text{ص} - \frac{5}{9}\right)$$

$$+ 5\text{ع}\left(\text{ص} - \frac{5}{9}\right).$$

$$2\text{س ص} - \frac{10}{9}\text{س} + 5\text{ع ص} - \frac{25}{9}\text{ع} = (2\text{س} + 5\text{ع})\left(\text{ص} - \frac{5}{9}\text{ع}\right)$$

نشر

$$(2\text{س}+5\text{ع})\left(\text{ص}-\frac{5}{9}\right) = 2\text{س ص}-\frac{10}{9}\text{س}+5\text{ع ص}-\frac{25}{9}\text{ع}$$

تحليل إلى جداء عاملين .

1) انشر كلاً من الجدائين :

$$\left(\frac{1}{5}\text{س}+\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\text{س}-\frac{2}{5}\right) \text{ ؛ } \left(\frac{4}{5}\text{س}-\frac{2}{7}\right)\left(\frac{9}{4}\text{ع}-\text{ص}\right)$$

2) حلِّل كلاًّ من $-18\text{س ع}+24\text{س ص}-6\text{س}$ ؛

$14\text{س ص}-7\text{س}-\frac{6}{8}\text{ص}-\frac{3}{8}$. إلى جداء عاملين .

3. الجداءات الشهيرة :

س و ع عددان ناطقان .

- $(\text{س}+\text{ع})^2 = (\text{س}+\text{ع})(\text{س}+\text{ع})$.

$(\text{س}+\text{ع})^2 = \text{س}(\text{س}+\text{ع})+\text{ع}(\text{س}+\text{ع})$.

$(\text{س}+\text{ع})^2 = \text{س}^2+\text{س ع}+\text{ع س}+\text{ع}^2$

أي $(\text{س}+\text{ع})^2 = \text{س}^2+2\text{س ع}+\text{ع}^2$

- $=(\text{س}-\text{ع})^2 = (\text{س}-\text{ع})(\text{س}-\text{ع})$.

$(\text{س}-\text{ع})^2 = \text{س}(\text{س}-\text{ع})-\text{ع}(\text{س}-\text{ع})$

$(\text{س}-\text{ع})^2 = \text{س}^2-\text{س ع}-\text{ع س}+\text{ع}^2$.

أي $(\text{س} - \text{ع})^2 = \text{س}^2 - 2\text{س}\text{ع} + \text{ع}^2$.

• $(\text{س} - \text{ع})(\text{س} + \text{ع}) = \text{س}(\text{س} + \text{ع}) - \text{ع}(\text{س} + \text{ع})$.

$(\text{س} - \text{ع})(\text{س} + \text{ع}) = \text{س}^2 + \text{س}\text{ع} - \text{ع}\text{س} - \text{ع}^2$.

أي $(\text{س} - \text{ع})(\text{س} + \text{ع}) = \text{س}^2 - \text{ع}^2$

احسُبْ كلاًّ مما يلي بطريقتين :

$\left(-\frac{5}{4} + \frac{7}{3}\right)^2$ ؛ $\left(-\frac{8}{3} - \frac{8}{9}\right)^2$ ؛ $\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{6}\right) \times \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{6}\right)$

التمارين

1. احسُب كلاًّ مما يلي :

$\frac{-27}{-18} + \frac{25}{-75}$ ؛ $\frac{14}{12} + \frac{-3}{5}$ ؛ $\frac{-33}{66} + \frac{-64}{16}$ ؛ $-4 + \frac{2}{7}$.

$\frac{3}{-8} + 21$ ؛ $\frac{23}{9} + \frac{15}{27}$ ؛ $\frac{1}{9} + \left(-\frac{3}{7}\right)$.

2. احسُب كلاًّ ممّا يلي :

1) $-\frac{2}{3} + \frac{15}{4} + \frac{-8}{5}$ ؛ $\frac{15}{27} + \frac{25}{-100} + \frac{-44}{33}$ ؛ $\frac{-18}{-24} + \frac{-72}{48} + \frac{75}{-125}$.

2) $\frac{7}{-8} + \frac{-12}{48} + 9$ ؛ $\frac{-21}{5} + 8 + \frac{35}{-14}$ ، $-12 + 27 + \frac{7}{-5}$.

3. احسُب بطريقتين كلاً ممّا يلي :

1) $\frac{-12}{5}+\frac{14}{-9}+14$ ؛ $\frac{4}{-10}+\frac{9}{27}+\frac{8}{20}$ ؛ $\frac{12}{-7}+3+\frac{5}{12}$.

2) $\frac{7}{-42}+\frac{-3}{60}+\frac{-48}{-16}$ ؛ $\frac{7}{9}+\frac{15}{8}+\frac{6}{5}$ ؛ $16+\frac{4}{5}+\frac{5}{4}$.

4. أ ، ب عددان صحيحان ، حيث ب $\neq 0$ ؛ احسُب كلاً مما يلي :

1) $\frac{أ}{ب}+\frac{-2}{3}$ ؛ $\frac{2أ}{-3}+\frac{3ب}{-5}$ ؛ $\frac{2أ}{2ب}+\frac{3أ}{3ب}$ ، $أ+\frac{1}{ب}$.

2) $أ+\frac{-2أ}{5}$ ؛ $-3+\frac{3أ}{ب}$ ؛ $\frac{-3أ}{-5}+\frac{أ}{-5}$ ؛ $3أ+\frac{1}{3ب}$.

5. احسُب بطريقتين كلاً مما يلي :

1) $\frac{-6}{5}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{-4}{3}\right)$ ؛ $(-3)\times\left(\frac{-6}{7}+\frac{3}{-2}\right)$ ؛ $\frac{5}{4}\times\left(1+\frac{-4}{5}\right)$.

2) $\left(8+\frac{5}{-8}\right)\times\frac{-15}{4}$ ؛ $\frac{12}{-14}\times\left(\frac{3}{-18}+\frac{-16}{24}\right)$ ؛ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\times 5$.

6. احسُب بطريقتين كلاً مما يلي :

1) $(-5)\times\left(\frac{-2}{3}+\frac{5}{-7}+\frac{-3}{-2}\right)$ ؛ $\frac{2}{3}\times\left[\frac{3}{2}+\frac{5}{-12}+(-3)\right]$

2) $\left(\frac{-21}{18}+14+\frac{-35}{25}\right)\times\frac{4}{5-12}$ ؛ $(-7)\times\left[\frac{12}{14}+(-1)+(-2)\right]$

7. 1) بيّن أن العددين $\frac{4}{5}+\frac{-12}{36}$ ؛ $\frac{6}{-18}+\frac{20}{25}$ متساويان.

2) احسُب $\frac{1}{-2}+\frac{-2}{3}+\frac{-3}{5}$.

8. احسُب كلاً مما يلي :

$\frac{3}{-4}-\frac{-1}{5}$ ؛ $\frac{2}{3}-\frac{-5}{7}$ ؛ $\frac{-21}{8}-\frac{-27}{-15}$ ؛ $18-\frac{21}{8}$ ؛

$\frac{35}{25}-(+4)$ ؛ $\frac{2}{-3}-\frac{-3}{2}$.

9. ا ، ب عددان صحيحان و ب غير معدوم ، احسُب كلاً ممّا يلي :

$\frac{2\text{ا}}{-3}-\frac{5\text{ا}}{4}$ ؛ $\frac{3\text{ا}}{2\text{ب}}-\frac{16\text{ا}}{2\text{ب}}$ ؛ $\frac{7\text{ا}}{6\text{ب}}-\frac{12\text{ا}}{3\text{ب}}$ ؛ $2\text{ا}-\frac{1}{\text{ب}}$.

10. احسُب بطريقتين كلاً ممّا يلي :

$\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{15}{2}-\frac{11}{6}\right)$ ؛ $\left(\frac{-14}{21}\right)\left(\frac{-15}{-35}-\frac{16}{-8}\right)$ ؛ $(-3)\left(\frac{-5}{7}-\frac{2}{-3}\right)$ ؛

$\left(\frac{3}{-4}\right)\left(-15-\frac{25}{16}\right)$ ؛ $\left(\frac{-18}{24}\right)\left(\frac{27}{36}-\frac{16}{21}\right)$ ؛ $(-4)\left(1-\frac{1}{4}\right)$

11. احسُب كلاً مما يلي :

$\text{ا}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{5}{3}$ ؛ $\text{ب}=\left(\frac{-9}{4}\right)-\left(\frac{-3}{2}\right)+\left(\frac{-10}{-11}\right)$ ؛

$\text{حـ}=-4-\frac{14}{15}+\frac{3}{10}-\frac{-19}{2}$ ؛ $\text{د}=1-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-6$.

12. أوجد في كل حالة من الحالات الآتية ـ العدد الناطق س ، بحيث يكون :

1) $\text{س}+\frac{2}{-3}=\frac{4}{5}$ ؛ 2) $\frac{5}{7}+\text{س}=\frac{2}{4}$ ؛ 3) $\text{س}+\frac{12}{5}=-8$

4) $س - \frac{11}{9} = \frac{4}{3}$ ؛ 5) $-\frac{1}{4} - 5س = \frac{6}{-9}$ ؛ 6) $\frac{4}{7}س - 5 = \frac{7}{2}$.

13. احسُب ما يلي :

$\frac{18}{24} - \left(\frac{-4}{8} + \frac{6}{9}\right)$ ؛ $\left(\frac{21}{-35} + \frac{12}{60}\right) - \frac{13}{4}$ ؛

$\left(-\frac{27}{63} - 7\right) + \frac{30}{42}$ ؛ $\left(\frac{4}{9} - \frac{7}{-5}\right) - \frac{4}{12}$.

14. احسُبْ كلاً من المجاميع الآتية : .

$9 + \left(-\frac{5}{7} + 2\right) + \left(3 + \frac{3}{4}\right)$ ؛

$\left(\frac{2}{3} - \frac{-3}{4}\right) - \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{-2} + \frac{-5}{3}\right)$.

$\frac{4}{12} - \left(\frac{-4}{8} - \frac{6}{9}\right) - \left[\frac{3}{2} - \left(\frac{4}{5} + 2\right)\right]$

؛ $\frac{-4}{7} - \frac{-8}{-6} + \frac{1}{4} - \left(\frac{-11}{-56} - \frac{3}{4}\right)$.

15. انشُرْ كلاً من الجداءات الآتية ، (حيث س عدد ناطق) :

$\frac{-9}{7}\left(7س + \frac{5}{4}\right)$ ؛ $س\left(4 - \frac{5}{3}س\right)$ ؛ $\frac{3}{2}س\left(6س - \frac{10}{3}\right)$

16. انشُر الجداءات الآتية ، (حيث س ، ع عددان ناطقان) :

$\left(\frac{س}{2} - \frac{ع}{5}\right) \times \left(\frac{-2س}{3} - \frac{ع}{5}\right)$ ؛

$\left(3س - \frac{1}{2}\right) \times \left(5س + \frac{1}{7}\right)$ ؛

$$\left(\frac{1}{3}\text{س} + 2\right) \times \left(\frac{1}{5}\text{ع} + \frac{1}{4}\right) \text{ ؛ } \left(\frac{3}{4}\text{س} + \frac{\text{ع}}{2}\right) \times \left(4\text{س} - 4\text{ع}\right)$$

17. انشر الجداءات الآتية ، (حيث س و ع عددان ناطقان) :

$$\left(\frac{2}{3}\text{س} + \frac{1}{5}\right)^2 \text{ ؛ } \left(\text{س} - \frac{8}{5}\right)^2 \text{ ؛ } \left(\text{س} - \frac{\text{ع}}{4}\right) \times \left(\text{س} + \frac{\text{ع}}{4}\right) \text{ ؛ }$$

$$\left(\text{س} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$15\left(-4 + \frac{2\text{س}}{3} - \frac{7\text{ع}}{5}\right) \text{ ؛ } \frac{5}{7} \times \left(\frac{7\text{ع}}{15} - \frac{14}{25} - 21\text{س}\right)$$

18. حلّل كلاًّ من المجاميع الجبرية الآتية إلى جداء عاملين :

(حيث س و ع عددان ناطقان) .

$$\text{س ع} - 5\text{س} + \frac{3}{4}\text{ع} - \frac{15}{4} \text{ ؛ } \frac{-3\text{س}}{2} + \frac{3\text{ع}}{4} - \frac{3\text{ص}}{8} \text{ ؛ } \frac{-2}{3} + \frac{4\text{س}}{3} - \frac{8\text{ع}}{-15} .$$

$$\text{س}^2 + \frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{4} \text{ ؛ } \frac{1}{25} - \frac{2}{15}\text{س} - \frac{2}{15}\text{س} + \frac{4}{9}\text{س}^2 .$$

---

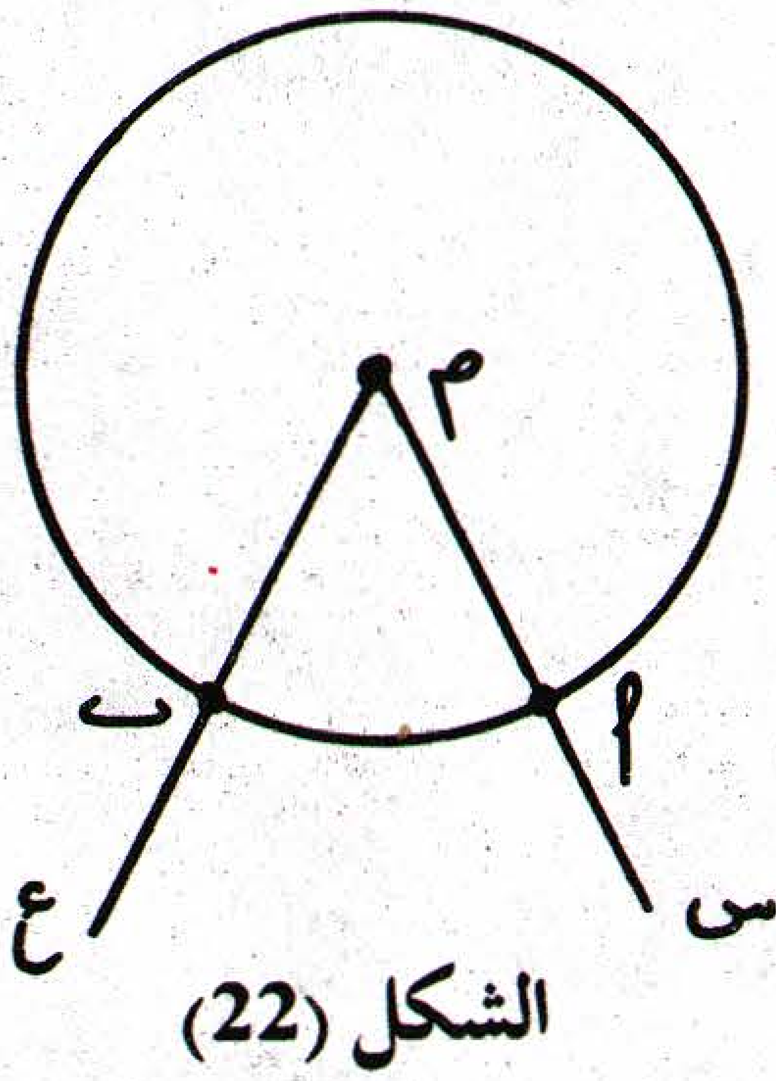
14 الزوايا والأقواس في دائرة

1. الزوايا المركزية والمحيطية في دائرة :

أ) الزاوية المركزية :

الزاوية المركزية في دائرة هي زاوية رأسها مركز هذه الدائرة .

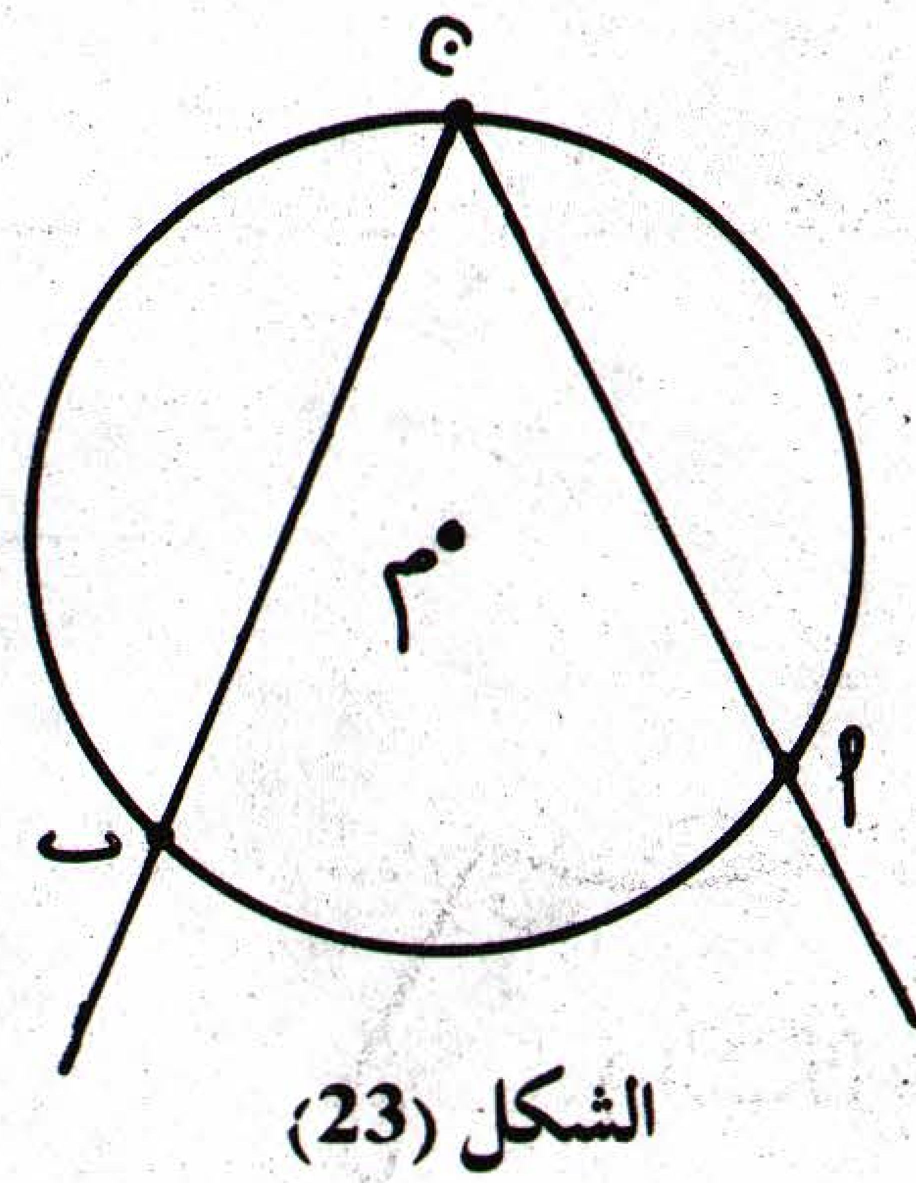
ـ في الشكل (22) [م س ، م ع] زاوية مركزية تحصر القوس أ ب⌒ .
والزاوية المركزية المنعكسة تحصر القوس أ ب⌒ .



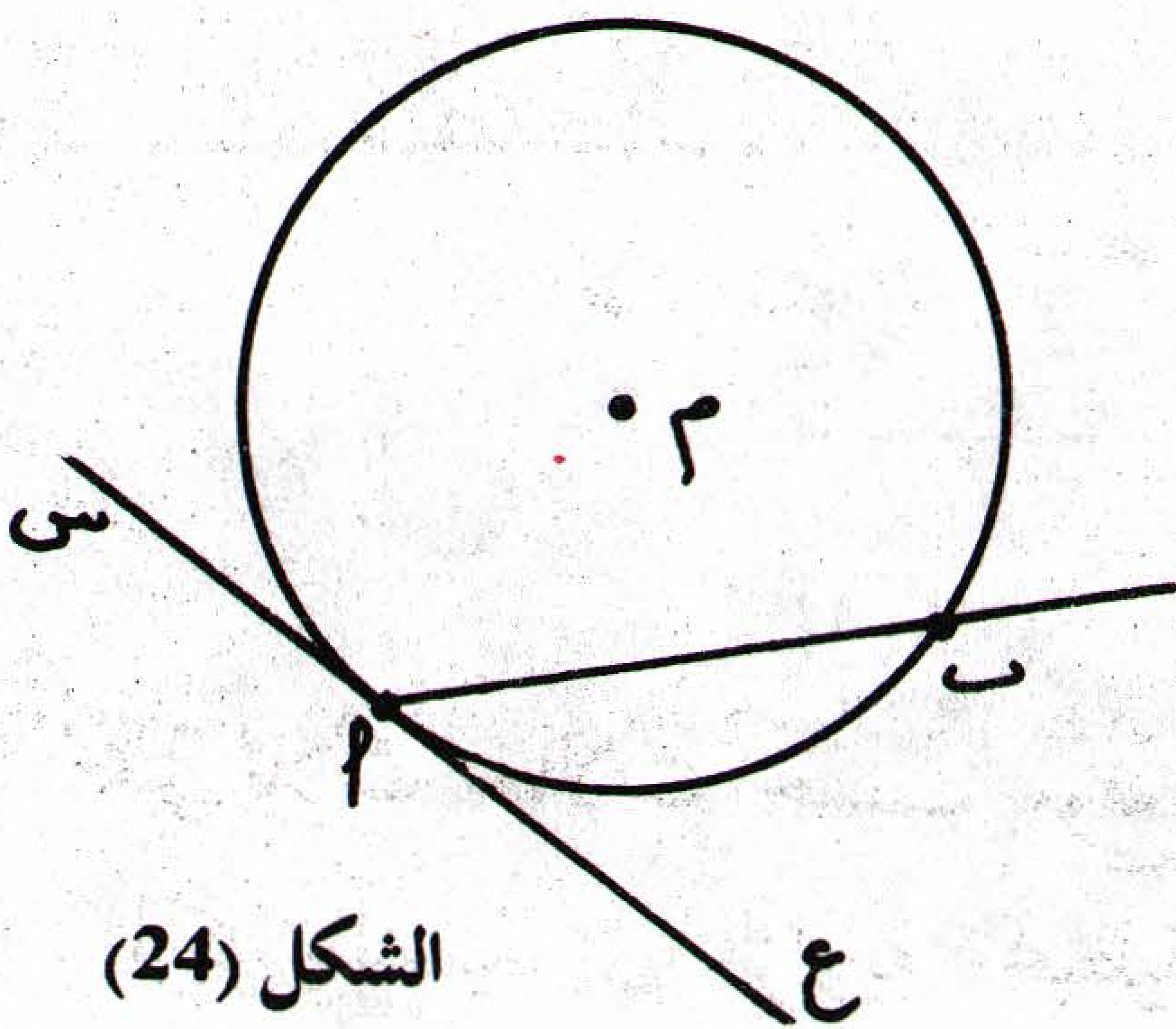
الشكل (22)

ب) الزاوية المحيطية :

الزاوية المحيطية في دائرة هي زاوية ناتئة رأسها نقطة من هذه الدائرة وحاملا ضلعيها إما قاطعان لهذه الدائرة أو أحدهما قاطع والآخر مماس .



الشكل (23)



الشكل (24)

ـ في (الشكل 23) [هـ ا ، هـ ب] **زاوية محيطية** تحصر القوس ا⌒ب .

ـ في (الشكل 24) [ا ب ، ا ع] **زاوية محيطية** تحصر القوس ا⌒ب .

والزاوية المحيطية [ا ب ، ا س] تحصر القوس ا⌒ب .

• رأيت في دروس السنة السابعة أن قيس قوس من دائرة هو قيس الزاوية المركزية التي تحصرها .

وبصفة عامة :

الزاويتان المركزيتان من نفس الدائرة أو من دائرتين متقايستين تحصران قوسين متقايستين .

القوسان المتقايستان من نفس الدائرة أو من دائرتين متقايستين يعينان زاويتين مركزيتين متقايستين .

جـ) الزاويتان المركزية والمحيطية المشتركتان في نفس القوس :

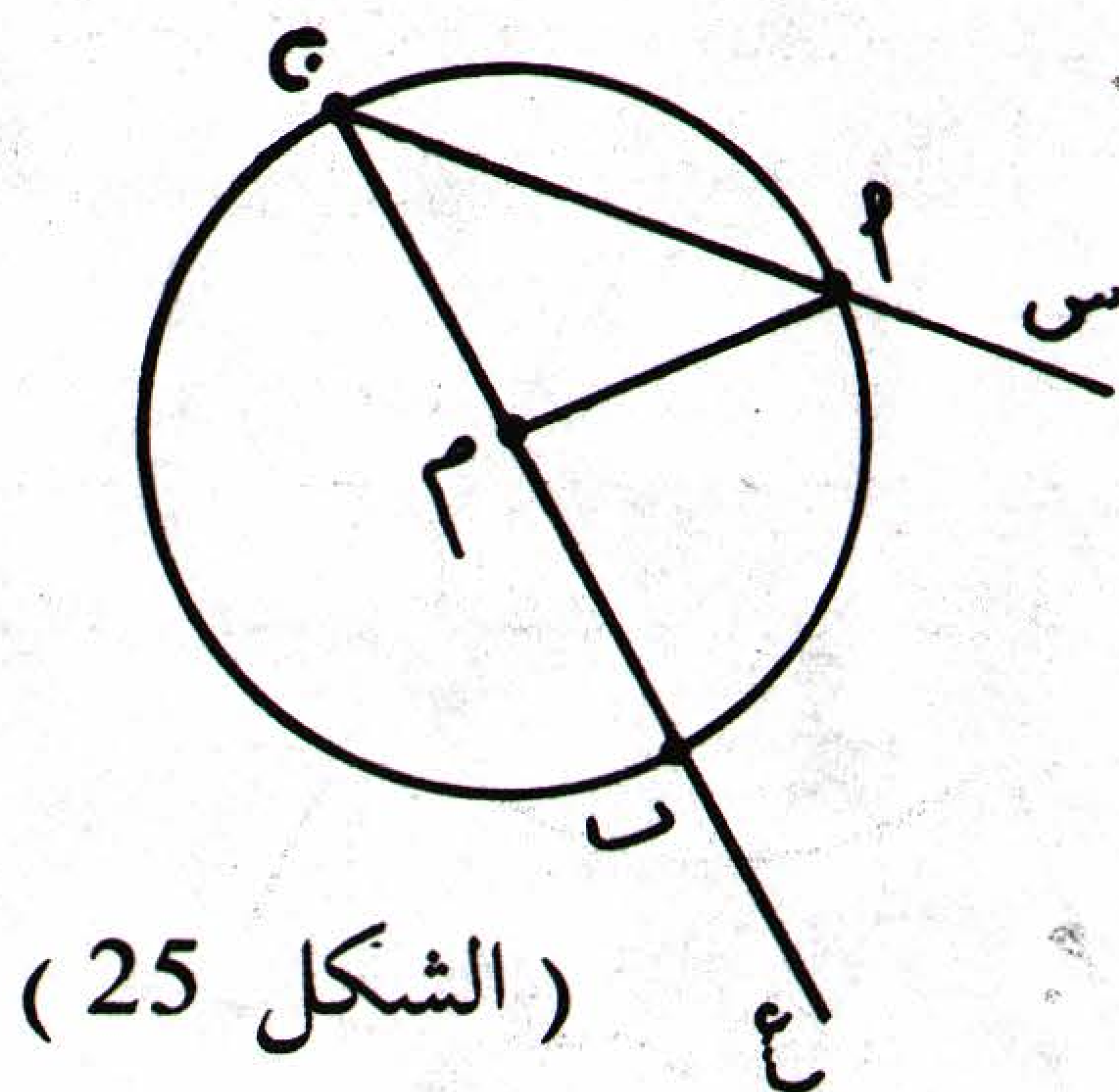
مسألة :

(د) دائرة مركزها م ، [هـ س ، هـ ع] زاوية محيطية تحصر القوس ا⌒ب .

[م ا ، م ب] زاوية مركزية تحصر نفس القوس ا⌒ب .

ـ لنبرهن على أن قيس الزاوية المحيطية هو نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس .

أي : $\widehat{ا هـ ب} = \frac{1}{2} \widehat{ا م ب}$



(الشكل 25)

ملاحظة :

نميز ثلاث حالات حسب موقع المركز بالنسبة إلى الزاوية المحيطية .

الحالة الأولى : المركز ينتمي إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية (الشكل 25) :

البرهان :

ـ المثلث م أ ج متساوي الساقين رأسه الأساسي م .

ومنه : $\widehat{\text{م ج أ}} = \widehat{\text{م أ ج}}$.

ـ وبما أن الزاوية المركزية [م أ ، م ب] خارجية بالنسبة إلى المثلث م ج أ .

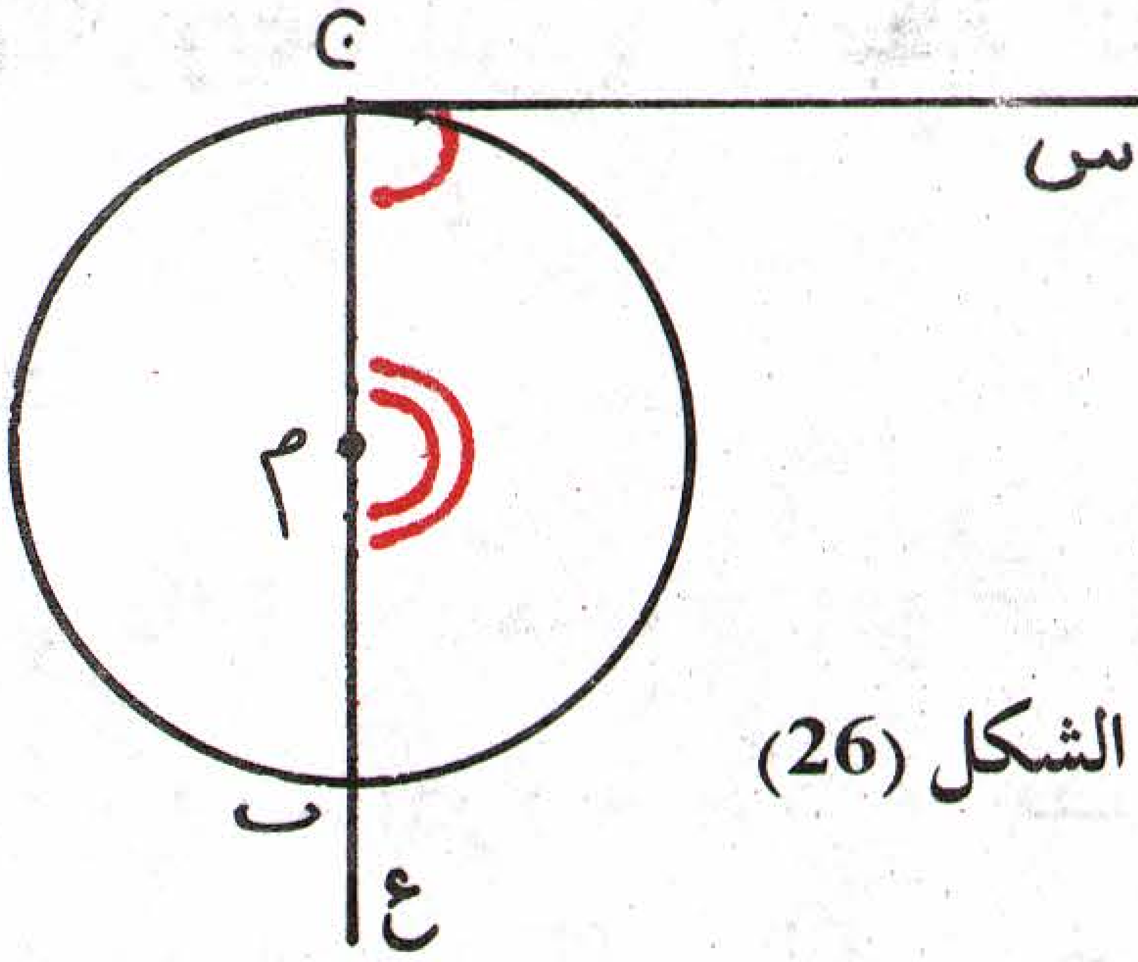
فإن : $\widehat{\text{أ م ب}} = \widehat{\text{م ج أ}} + \widehat{\text{م أ ج}}$

نستنتج أنّ : $\widehat{\text{أ م ب}} = 2\,\widehat{\text{م ج أ}}$. ونعلم أنّ $\widehat{\text{م ج أ}} = \widehat{\text{أ ج ب}}$.

إذن : $\widehat{\text{أ ج ب}} = \frac{1}{2}\,\widehat{\text{أ م ب}}$

ـ برهن على أنه إذا كان حامل أحد الأضلاع مماساً (كما في الشكل 26) فإن $\widehat{\text{ج م ب}} = 2\,\widehat{\text{س ج ب}}$.

أي : $\widehat{\text{س ج ب}} = \frac{1}{2}\,\widehat{\text{ج م ب}}$.



الشكل (26)

الحالة الثانية : المركز يقع داخل الزاوية المحيطية (الشكل 27) :

البرهان :

ـ نرسم نصف المستقيم [ج هـ الذي يشمل المركز م .

لاحظ أن :

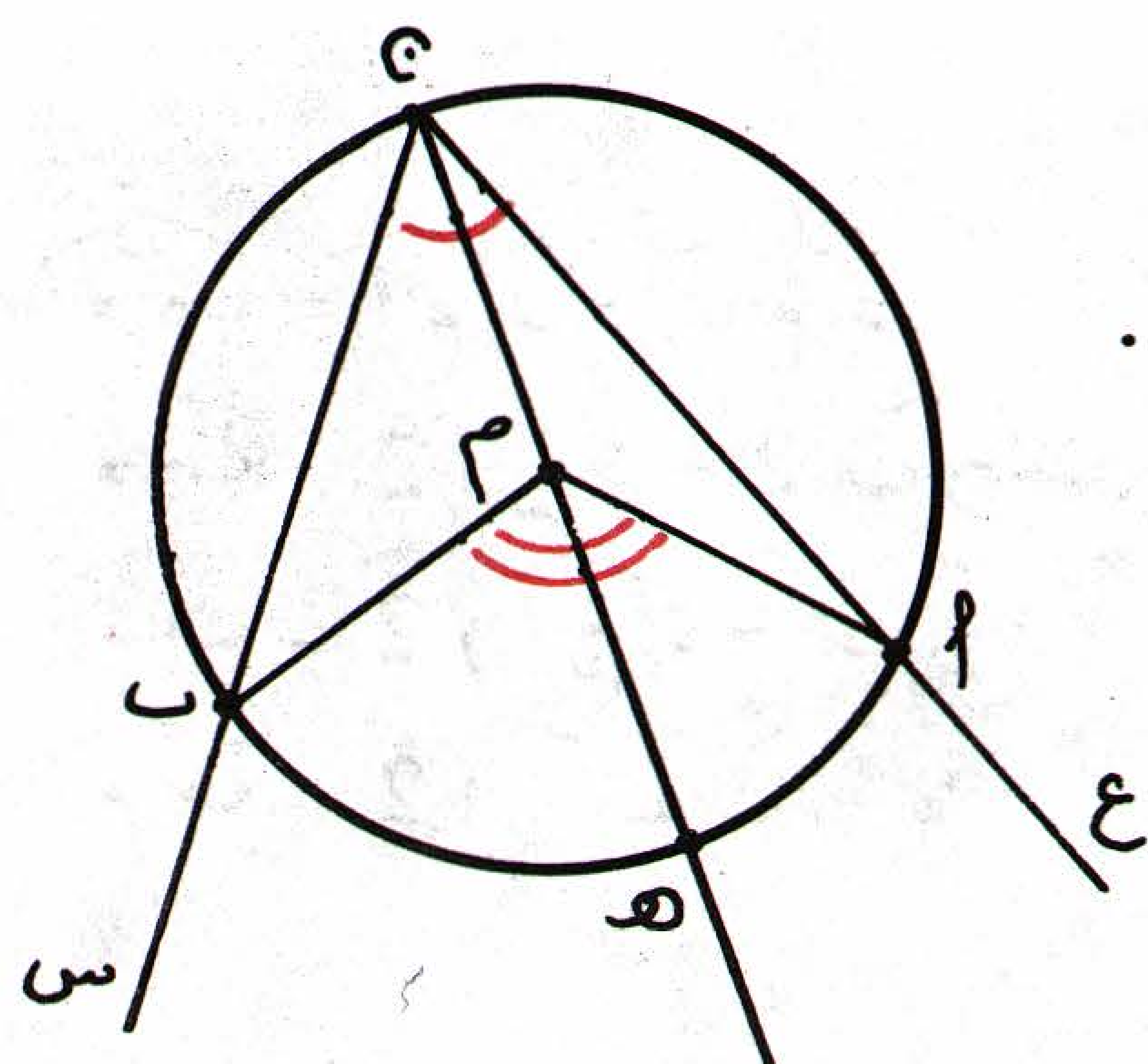
$\widehat{\text{أ م هـ}} = 2\,\widehat{\text{أ ج هـ}}$ (الحالة الأولى) .

و $\widehat{\text{هـ م ب}} = 2\widehat{\text{هـ جـ ب}}$ (الحالة الأولى) .

إذن : $\widehat{\text{أ م هـ}} + \widehat{\text{هـ م ب}} = 2\widehat{\text{أ جـ هـ}} + 2\widehat{\text{هـ جـ ب}}$.

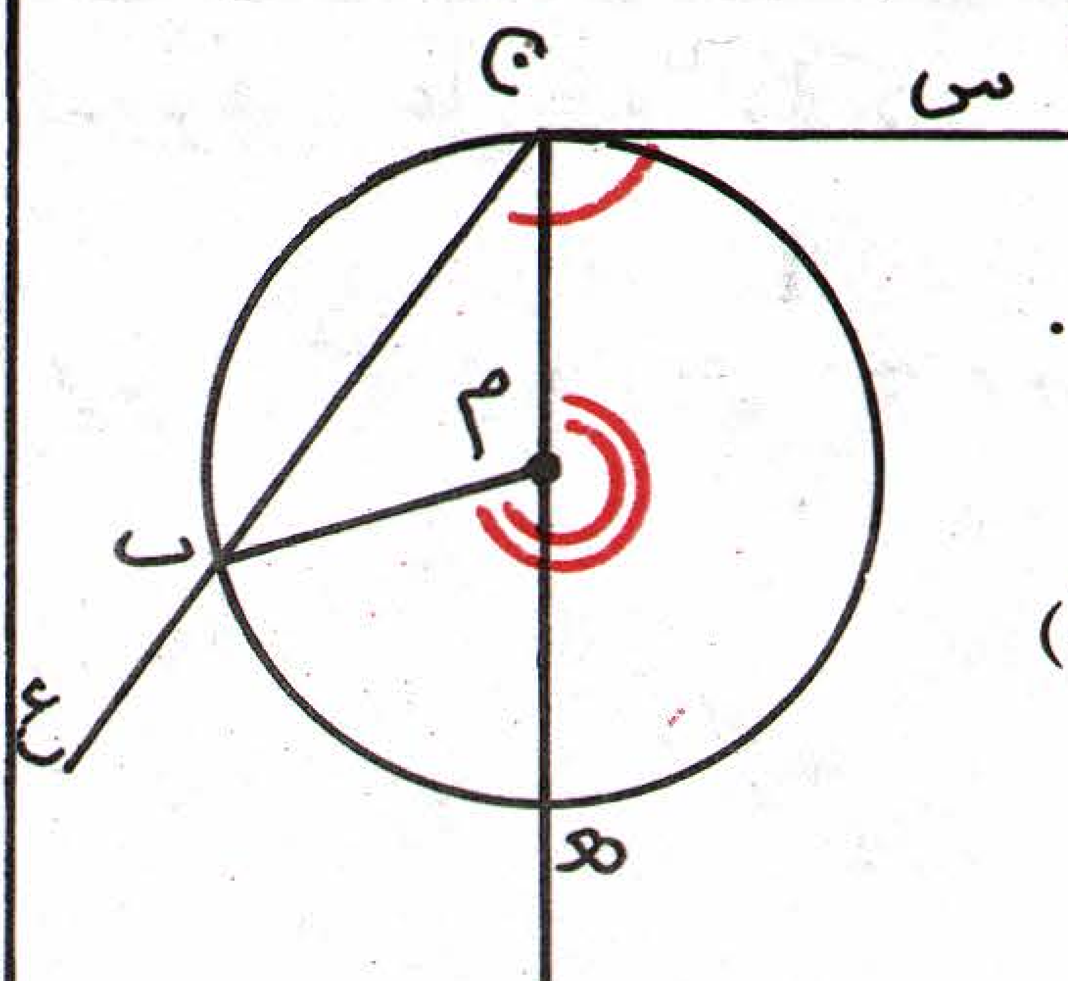
ومنه : $\widehat{\text{أ م ب}} = 2\widehat{\text{أ جـ ب}}$.

أي : $\widehat{\text{أ جـ ب}} = \frac{1}{2}\widehat{\text{أ م ب}}$.



الشكل (27)

- برهن على أنه إذا كان حامل أحد ضلعي الزاوية المحيطية مماسا كما في الشكل (28)، فإن قيس الزاوية المنعكسة [م جـ ، م ب] ضعف قيس الزاوية المحيطية [جـ س ، جـ ب] .



الشكل (28)

الحالة الثالثة : المركز يقع **خارج** الزاوية المحيطية (الشكل 29) :

البرهان :

- نرسم نصف المستقيم [جـ هـ الذي يشمل المركز م .

لاحظ أن :

$\widehat{\text{أ م هـ}} = 2\widehat{\text{أ جـ هـ}}$ (الحالة الأولى) .

$\widehat{\text{ب م هـ}} = 2\widehat{\text{ب جـ هـ}}$ (الحالة الأولى) .

لدينا :

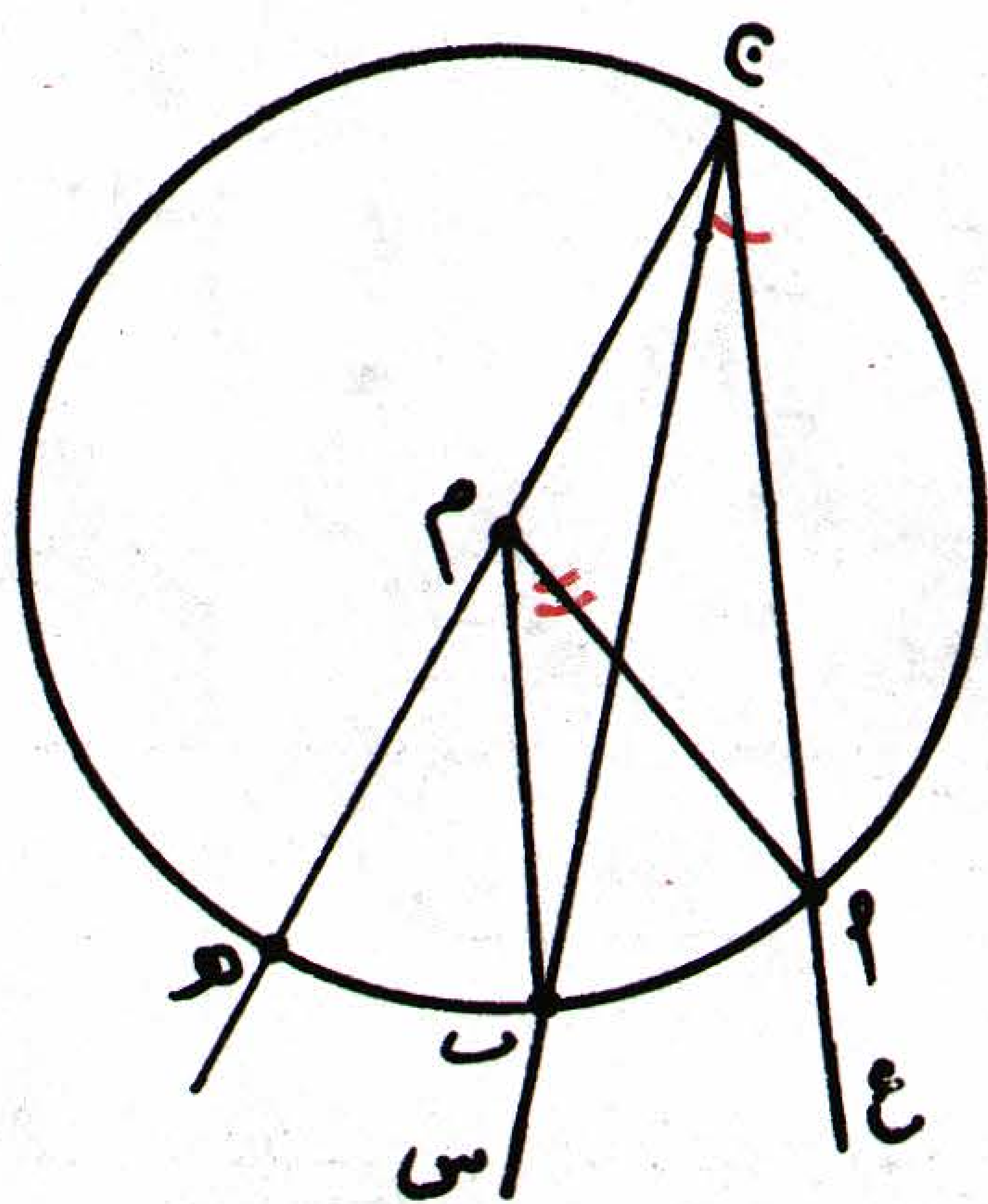
$\widehat{أمب} = \widehat{أمهـ} - \widehat{بمهـ}$

$\widehat{أمب} = 2\widehat{أجهـ} - 2\widehat{بجهـ}$.

$\widehat{أمب} = 2(\widehat{أجهـ} - \widehat{بجهـ})$.

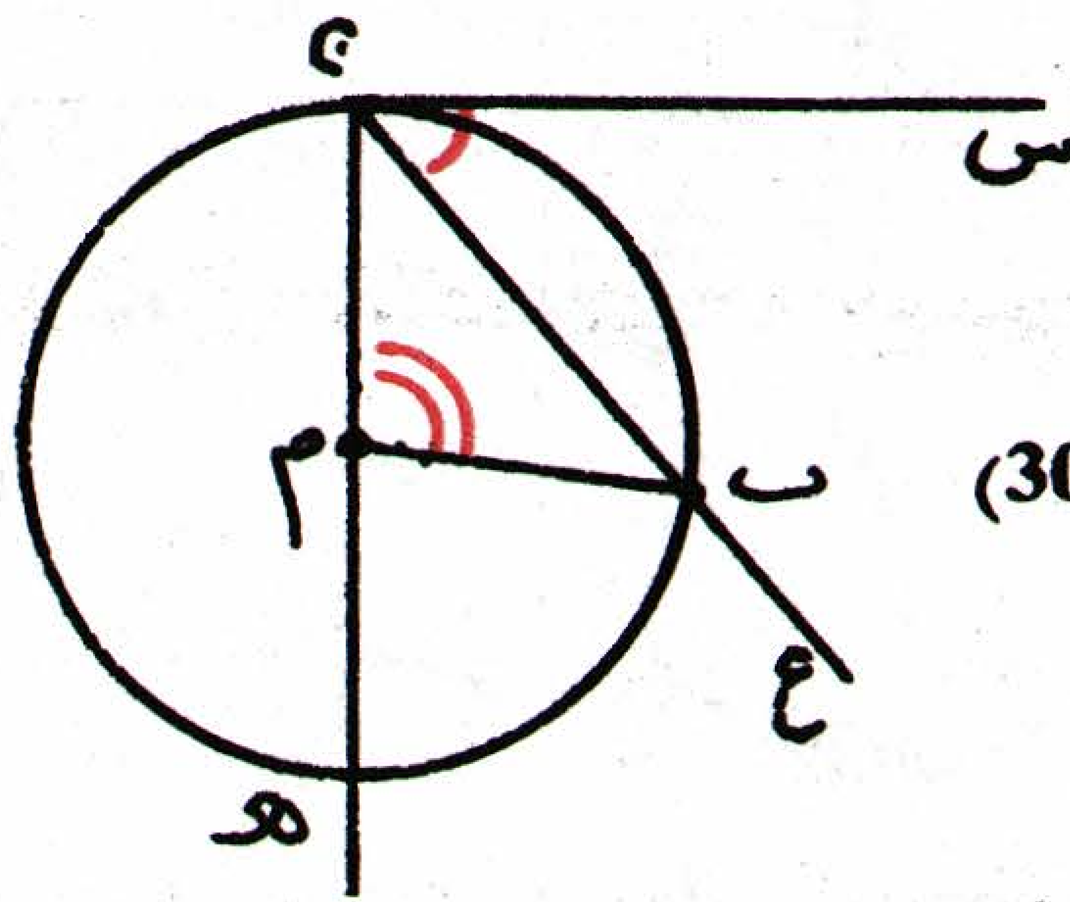
$\widehat{أمب} = 2\widehat{أجب}$.

أي : $\widehat{أجب} = \frac{1}{2}\widehat{أمب}$.



الشكل (29)

ـ برهن على أنه إذا كان حامل أحد ضلعي الزاوية المحيطية مماسا فإن : $\widehat{سجب} = \frac{1}{2}\widehat{جمب}$.



الشكل (30)

من الحالات الثلاث السابقة نستخلص النظرية الآتية :

قيس الزاوية المحيطية يساوي نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس .

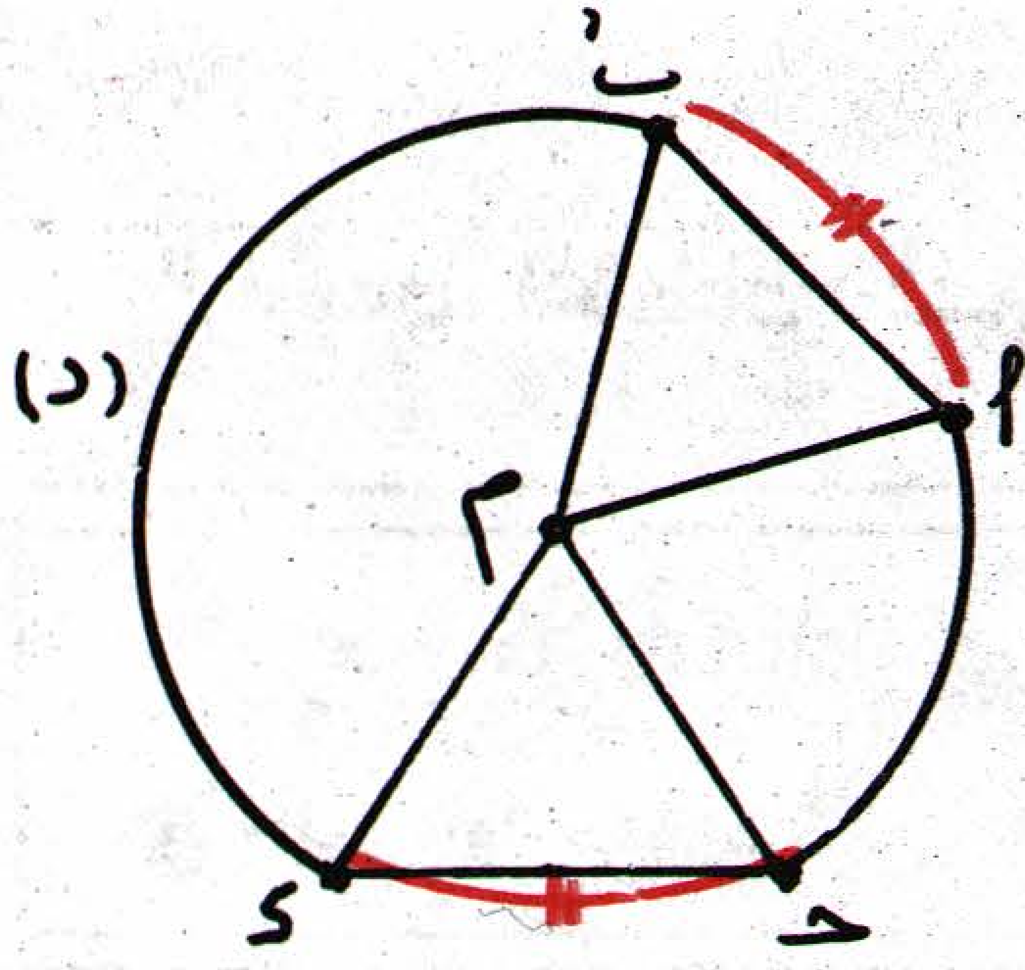
2. خواص الأقواس المتقايسة والأوتار المتقايسة :

• **مسألة :**

$\overset{\frown}{أب}$ ، $\overset{\frown}{حد}$ قوسان متقايستان من الدائرة د (م ، نق) (الشكل 31)

ـ لنبرهن على أن الوترين [أب] و [حد] متقايسان .

البرهان :



الشكل (31)

ـ بما أن القوسين أب ، جد متقايستان
إذن الزاويتان المركزيتان [م أ ، م ب] ،
[م ج ، م د] متقايستان .
أي : أم ب = ج م د .
المثلثان أ م ب ، ج م د متقايسان لأن

م أ = م ج
م ب = م د (كل من م أ ، م ج ، م د ، م ب هو نصف قطر) .
أ م ب = ج م د

ونستنتج من تقايسهما أن أ ب = ج د .
أي أن الوترين [أ ب] و [ج د] متقايسان .

ملاحظة :

إذا كان القوسان أب ، جد متقايستين ومن دائرتين متقايستين يمكن البرهان على أن الوترين [أ ب] و [ج د] متقايسان .

نظرية :

القوسان المتقايستان من دائرة واحدة أو من دائرتين متقايستين تحصران وترين متقايسين .

• برهن على **النظرية** الآتية :

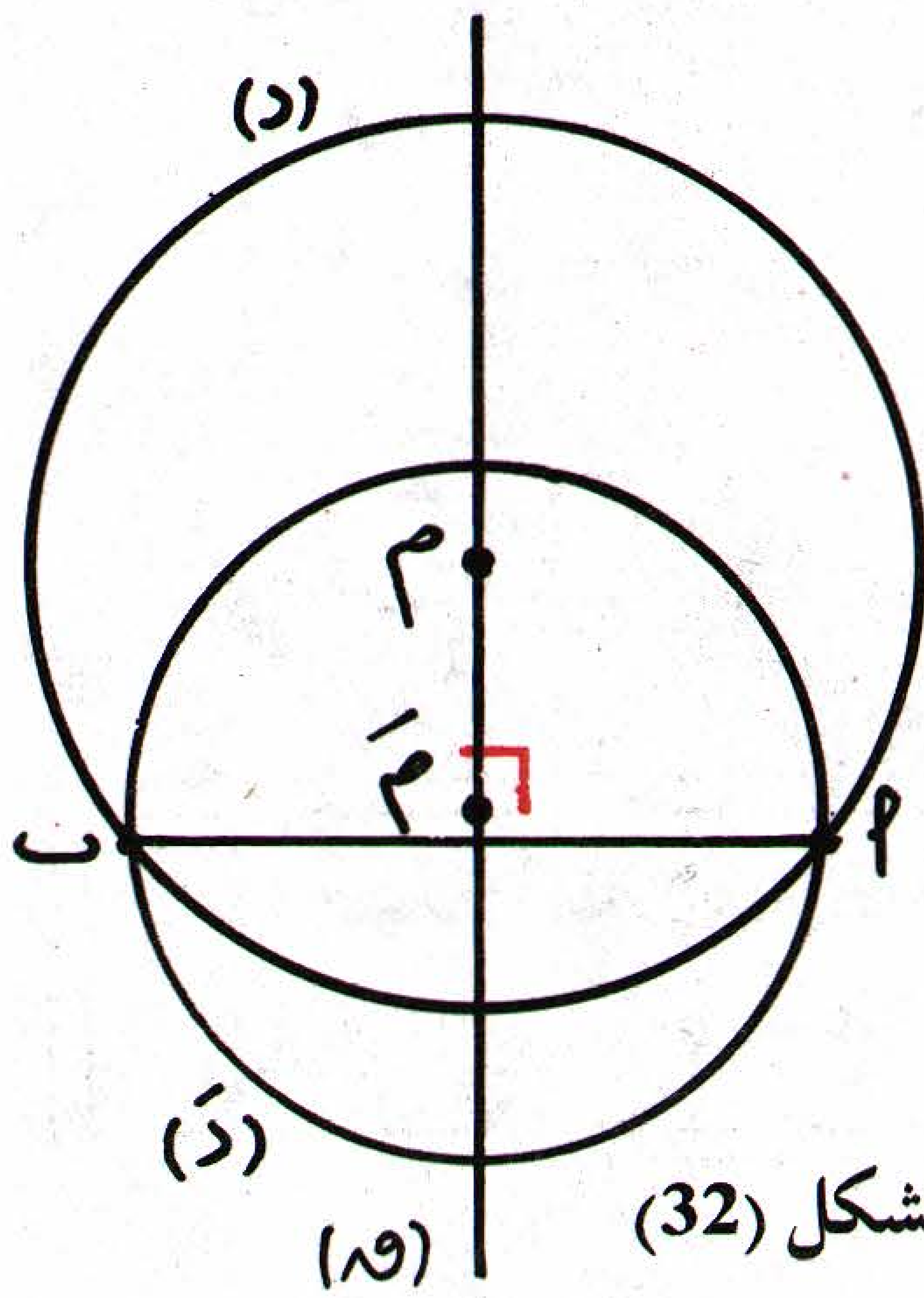
الوتران المتقايسان من دائرة واحدة أو من دائرتين متقايستين يشدان قوسين متقايستين .

نتيجة :

الزاويتان المحيطتان المشتركتان في نفس القوس متقايستان .

ـ برهن على أن الزاويتين المحيطتين اللتين تحصران قوسين متقايستين من دائرة واحدة أو من دائرتين متقايستين هما زاويتان متقايستان .

تطبيقات



الشكل (32)

1. الدائرة التي تشمل نقطتين :

أ ، ب نقطتان ، (ق) محور [أ ب] .

ـ نعلم أن كل نقطة م من (ق) متساوية المسافة عن النقطتين أ ، ب .

أي : م أ = م ب .

ـ فالدائرة التي مركزها النقطة م ونصف قطرها م أ تشمل النقطتين أ ، ب .

بصفة عامة كل نقطة ۾ من (ق) هي مركز لدائرة تشمل النقطتين أ ، ب .

نظرية :

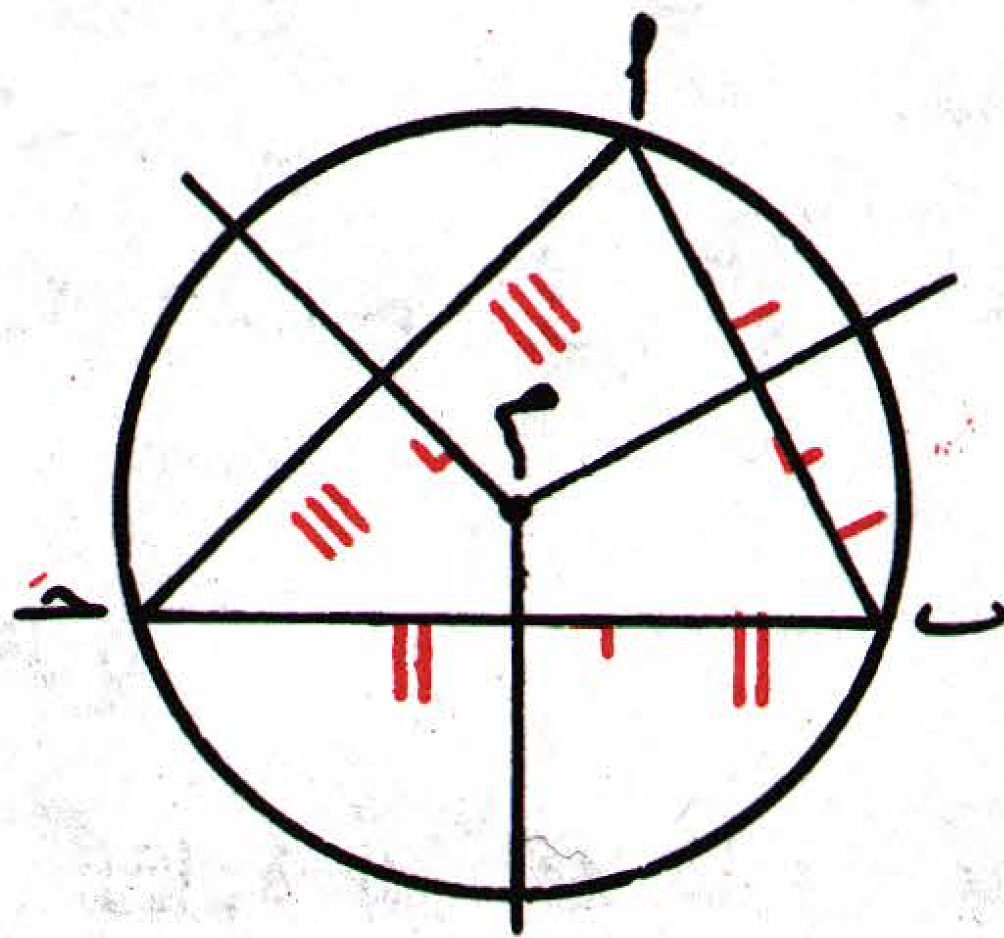
محور قطعة مستقيمة هو مجموعة مراكز الدوائر التي تشمل طرفي هذه القطعة .

2. الدائرة المعينة بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة :

أ ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

ـ لنبرهن على وجود دائرة وحيدة تشمل هذه النقط الثلاث .

البرهان :



الشكل (33)

ـ النقط ا ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة ،
فهي تعيّن مثلثًا ا ب حـ .
يمكننا أن نبرهن على أن محاور أضلاع هذا المثلث تتقاطع في نقطة وحيدة م .
نستنتج أن : م ا = م ب = م حـ .
فالدائرة التي مركزها م ونصف قطرها م ا تشمل النقط الثلاث ا ، ب ، حـ وتسمى الدائرة المحيطة بالمثلث ا ب حـ .

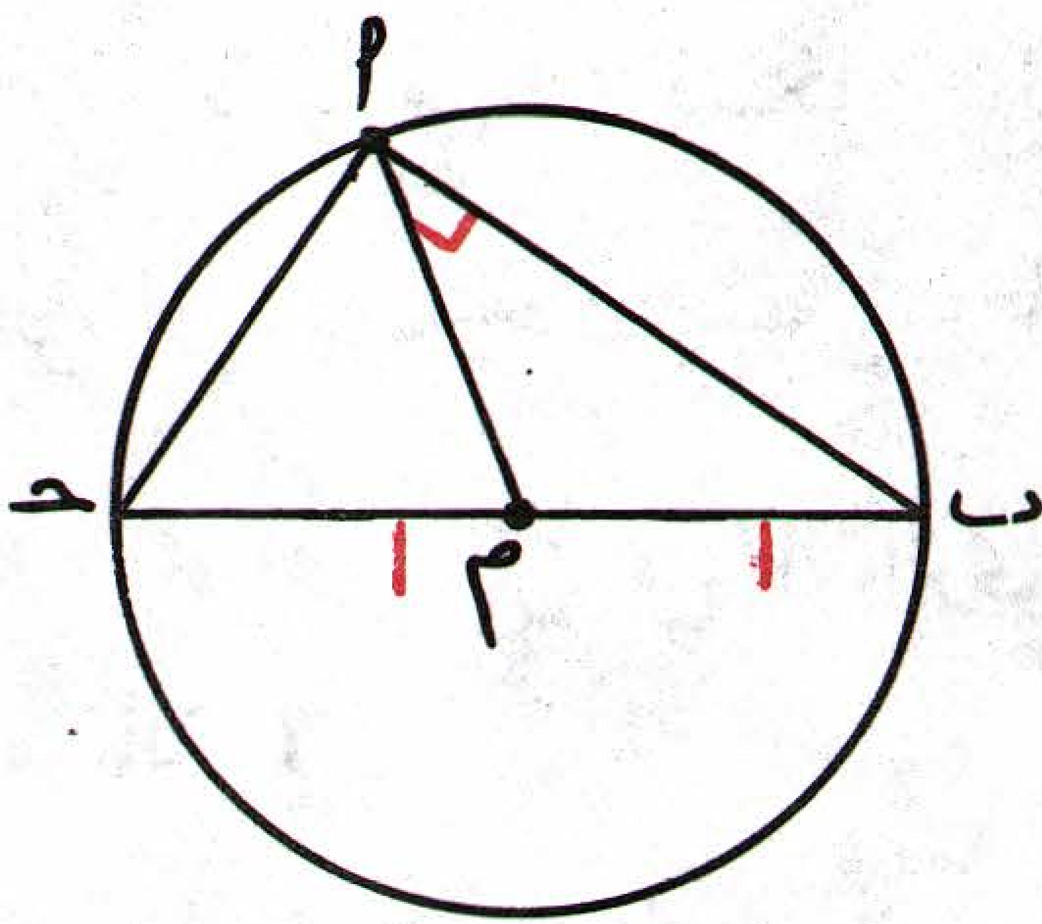
نظرية :

توجد دائرة وحيدة تشمل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

ا ، ب ، حـ ثلاث نقط على استقامة واحدة . هل توجد دائرة تشمل هذه النقط الثلاث ؟

حالة خاصة :

الدائرة المحيطة بمثلث قائم :



الشكل (34)

مسألة : ا ب حـ مثلث قائم في ا
ـ لنبيّن أن النقطة م منتصف الوتر [ب حـ] هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ا ب حـ .

البرهان :

ـ بما أن ا ب حـ مثلث قائم و م هي منتصف [ب حـ] .
فإن : م ا = م ب = م حـ .

ـ نستنتج أن م هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم أ ب حـ .
لاحظ أن :
الوتر [ب حـ] في المثلث القائم أ ب حـ هو قطر لهذه الدائرة .

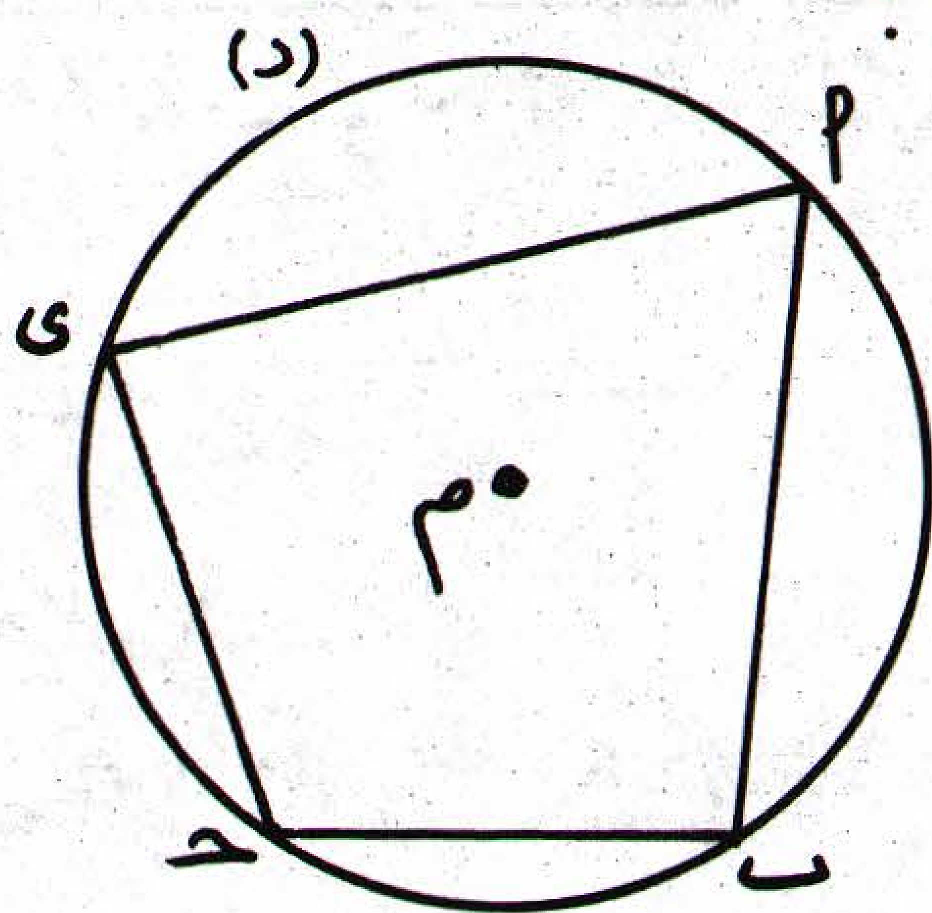
نظرية :

الدائرة التي قطرها وتر مثلث قائم هي الدائرة المحيطة بهذا المثلث .

(د) دائرة مركزها م ، [ب حـ] قطر لها ، أ نقطة منها تختلف عن ب و حـ .
1) برهن أن الزاوية المحيطية [أ ب ، أ حـ] هي زاوية قائمة .
2) برهن باستخدام المتباينات المثلثية أن القطر [ب حـ] هو أطول ضلع في المثلث أ ب حـ وهو أطول وتر في الدائرة (د) .

3. الدائرة التي تشمل أربع نقط (الرباعي الدائري) :

1) تعريف :



الشكل (35)

(د) دائرة ؛ أ ، ب ، حـ ، ى
أربع نقط منها (الشكل 35)
الرباعي أ ب حـ ى يسمى **رباعيا دائريا** .

2) خواص الرباعي الدائري :

الشكل (36)

مسألة 1 :

أ ، ب ، حـ ، ى أربع نقط من دائرة (د)
مركزها م (الشكل 36)
ـ لنبرهن أن كل زاويتين متقابلتين من الرباعي الدائرى أ ب حـ ى متكاملتان أي : أ̂ + حـ̂ = 180° و ب̂ + ى̂ = 180°

البرهان :

ـ نصل المركز م بالنقطتين ب ، د .

بما أن قيس الزاوية المحيطية يساوي نصف قيس الزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس .

فإن : $\widehat{\text{ب أ د}} = \frac{1}{2}\widehat{\text{ب م د}}$ (حيث $\widehat{\text{ب م د}}$ هو قيس الزاوية المركزية المنعكسة [م ب ، م د]).

و $\widehat{\text{ب جـ د}} = \frac{1}{2}\widehat{\text{ب م د}}$ (حيث $\widehat{\text{ب م د}}$ هو قيس الزاوية المركزية الناتئة [م ب ، م د]).

ومنه : $\widehat{\text{ب أ د}} + \widehat{\text{ب جـ د}} = \frac{1}{2}\widehat{\text{ب م د}} + \frac{1}{2}\widehat{\text{ب م د}}$.

$$\widehat{\text{ب أ د}} + \widehat{\text{ب جـ د}} = \frac{1}{2}\left(\widehat{\text{ب م د}} + \widehat{\text{ب م د}}\right)$$

$\widehat{\text{ب أ د}} + \widehat{\text{ب جـ د}} = \frac{1}{2}\hat{\text{م}}$ (حيث $\hat{\text{م}}$ هو قيس الزاوية الكلية ذات الرأس م) .

أي : $\hat{\text{أ}} + \hat{\text{جـ}} = 180^\circ$.

ـ يمكننا أن نبرهن بطريقة مماثلة على أن : $\hat{\text{ب}} + \hat{\text{د}} = 180^\circ$.

نظرية :

في الرباعي الدائري كل زاويتين متقابلتين متكاملتان .

ملاحظة :

أ ب جـ د رباعي دائري و [جـ د ، جـ س] زاوية خارجية بالنسبة إليه .

فيكون : $\widehat{\text{ب أ د}} + \widehat{\text{ب جـ د}} = 180^\circ$ و $\widehat{\text{ب جـ د}} + \widehat{\text{د جـ س}} = 180^\circ$.

نستنتج أن : $\widehat{\text{ب أ د}} = \widehat{\text{د جـ س}}$.

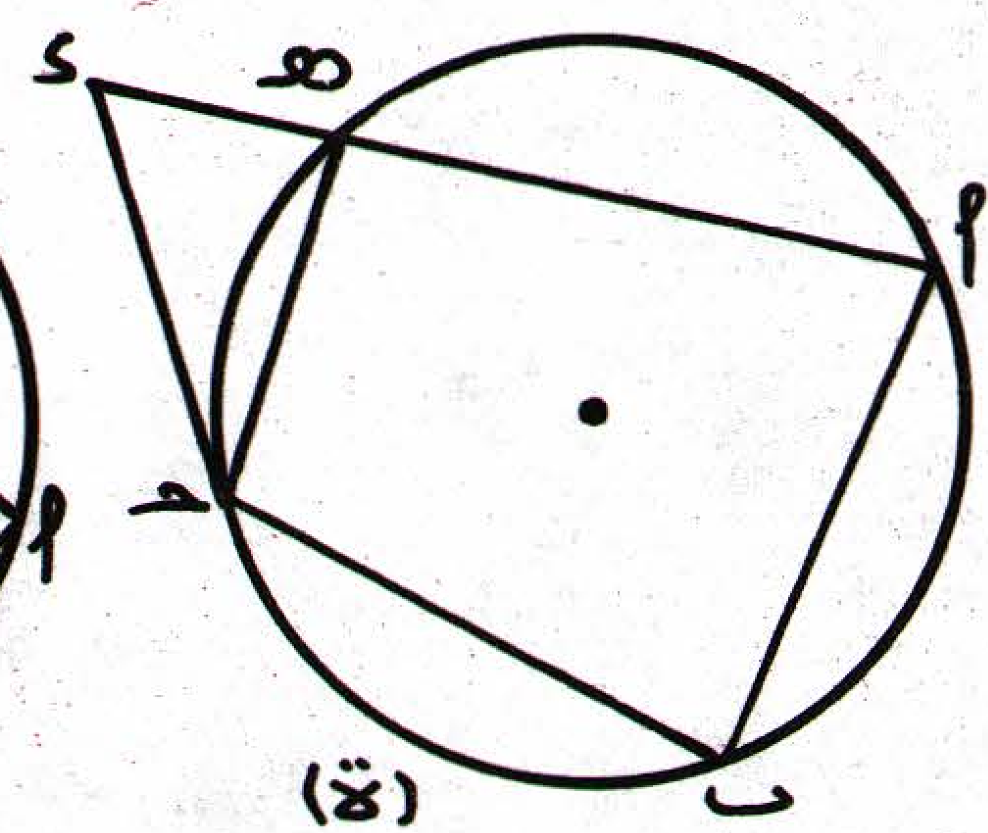
نتيجة :

الزاوية الخارجية بالنسبة إلى رباعي دائري تقايس الزاوية المقابلة للزاوية المجاورة لها.

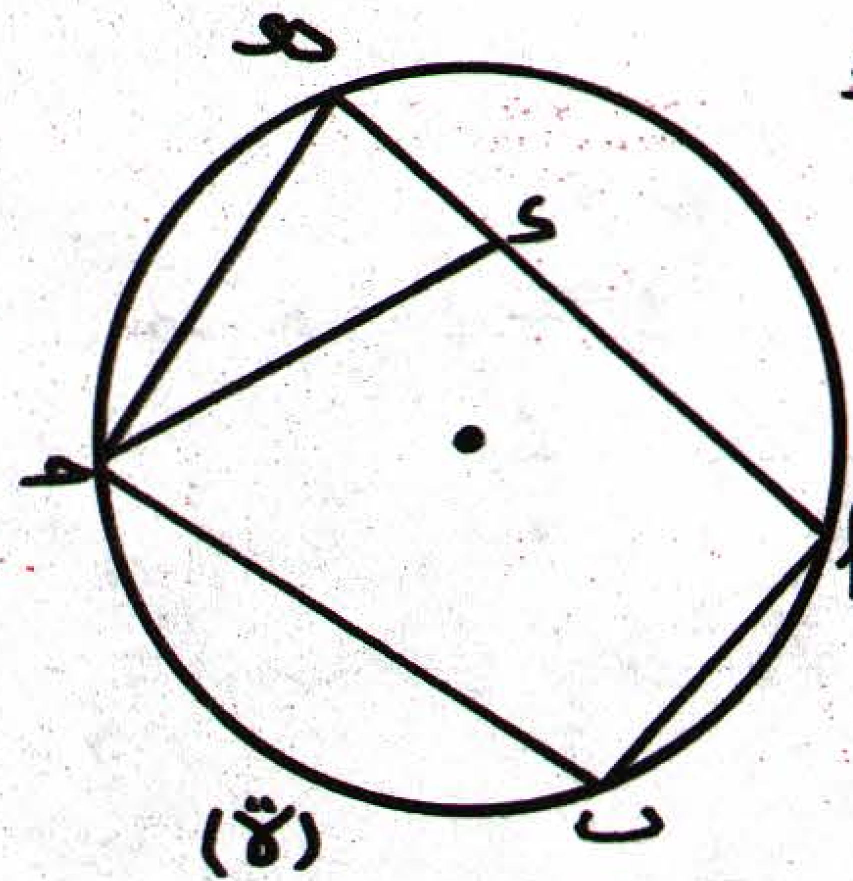
مسألة 2 :

ا ب حـ ء رباعي حيث الزاويتان المتقابلتان [ب ا ، ب حـ] و [ء ا ، ء حـ] متكاملتان أي : $\hat{ب} + \hat{ء} = 180^0$.

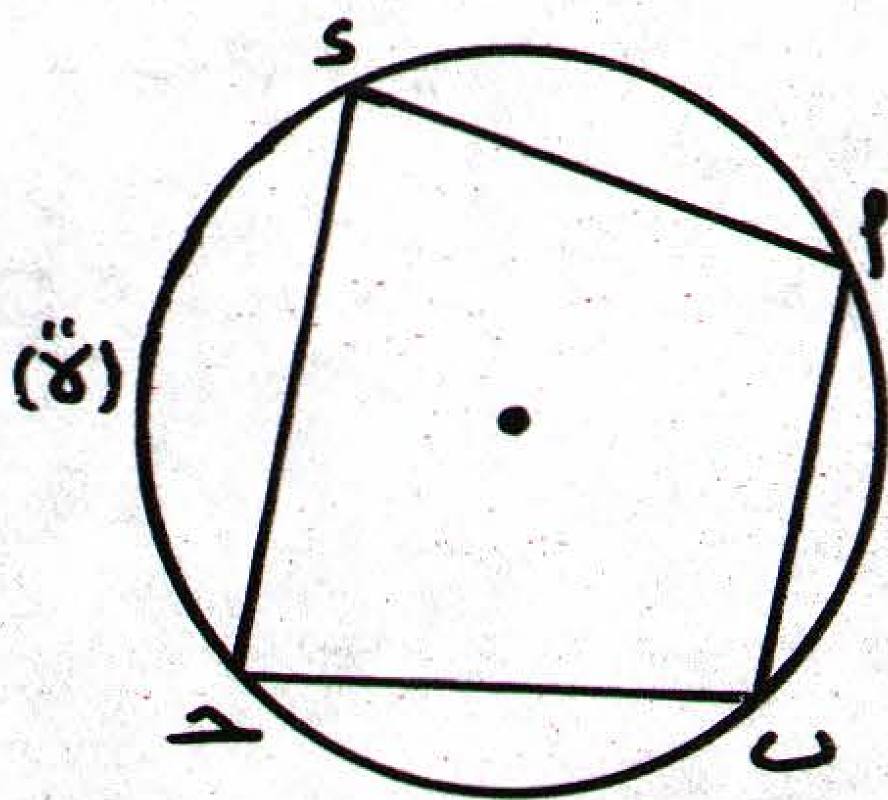
ـ لنبرهن أن ا ب حـ ء رباعي دائري .



الشكل (37)



الشكل (38)



الشكل (39)

البرهان :

ـنعلم أن كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعيّن دائرة .
فالرؤوس الثلاثة ا ، ب ، حـ من الرباعي ا ب حـ ء تنتمي إلى دائرة واحدة نرمز إليها بالرمز (ة) .

الرأس ء له حتمًا أحد الأوضاع الآتية :

- إما ء تنتمي إلى خارج الدائرة (ة) (الشكل 37)
- وإما ء تنتمي إلى داخل الدائرة (ة) (الشكل 38)
- وإما ء تنتمي إلى الدائرة (ة) . (الشكل 39)

الحالة الأولى : ء تنتمي إلى خارج الدائرة (ة) .

(أء) يقطع (ة) في نقطة أخرى هـ .

فيكون اب حـ هـ رباعيًا دائريًا

ومنه : $\widehat{\text{اب حـ}} + \widehat{\text{ا هـ حـ}} = 180^\circ$ (من خواص الرباعي الدائري)

وبما أن : $\widehat{\text{اب حـ}} + \widehat{\text{ا ء حـ}} = 180^\circ$ (من المعطيات) .

فإن $\widehat{\text{ا هـ حـ}} = \widehat{\text{ا ء هـ}}$. وهذا مستحيل لأن [هـ ا ، هـ حـ] زاوية خارجية بالنسبة إلى المثلث هـ ء حـ

إذن ء لا تنتمي إلى خارج الدائرة (ة) .

الحالة الثانية : ء تنتمي إلى داخل (ة) .

(أء) يقطع (ة) في نقطة أخرى هـ .

فيكون اب حـ هـ رباعيًا دائريًا .

ومنه : $\widehat{\text{اب حـ}} + \widehat{\text{ا هـ حـ}} = 180^\circ$ (من خواص الرباعي الدائري)

وبما أن : $\widehat{\text{اب حـ}} + \widehat{\text{ا ء حـ}} = 180^\circ$ (من المعطيات) .

فإن : $\widehat{\text{ا هـ حـ}} = \widehat{\text{ا ء حـ}}$. وهذا مستحيل لأن [ء ا ، ء حـ] زاوية خارجية بالنسبة إلى المثلث ء حـ هـ .

إذن ء لا تنتمي إلى داخل (ة) .

ـ فالحالة الوحيدة الممكنة هي أن ء تنتمي إلى (ة) .

وهذا يعني أن الرباعي اب حـ ء دائري .

نظرية :

يكون الرباعي دائريًا إذا كانت فيه زاويتان متقابلتان متكاملتين .

4. الدوائر التي تمس مستقيمين :

مسألة 1 :

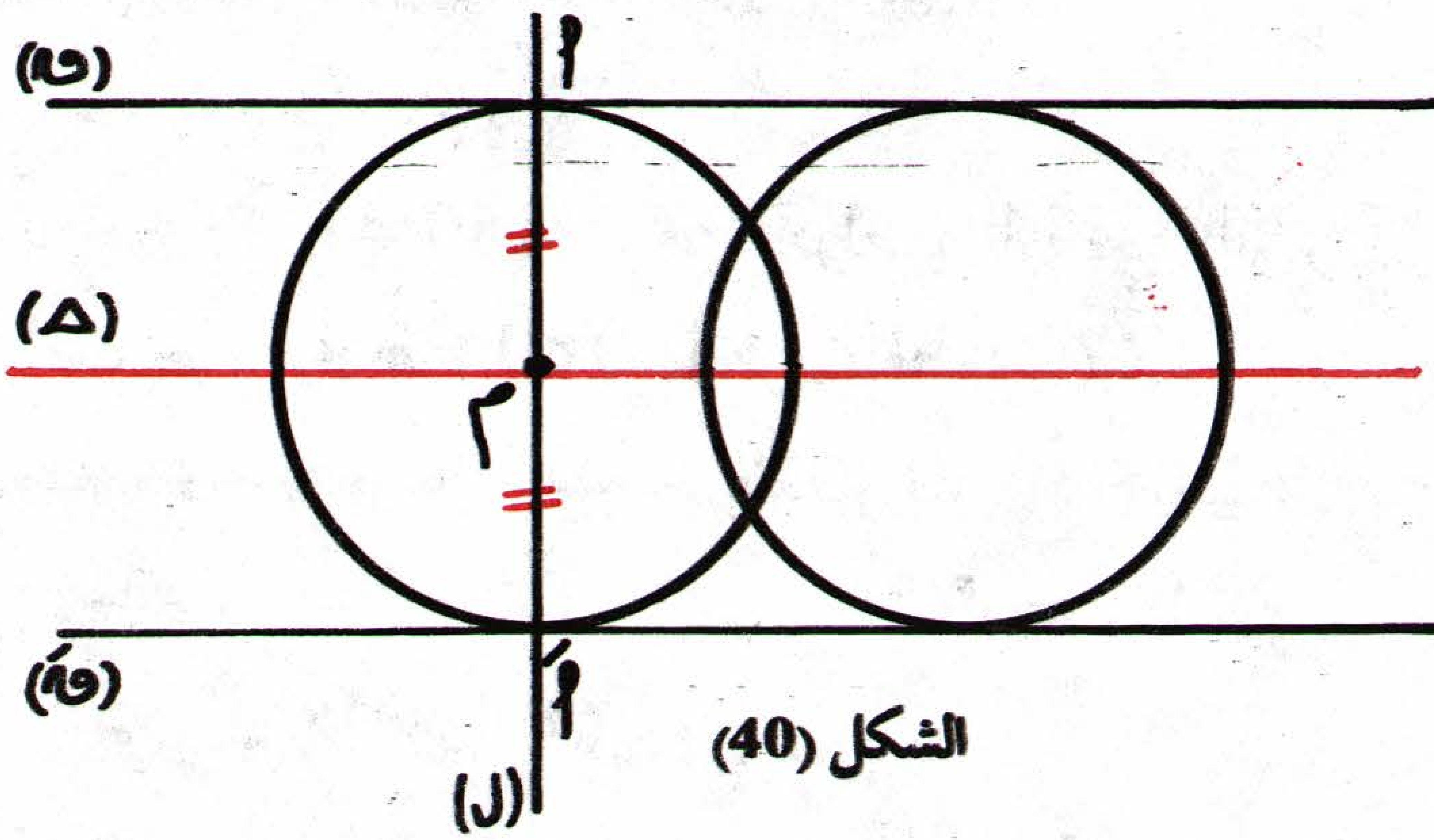
(ق) ، (ق′) مستقيمان متوازيان تماما .

ـ لنبرهن على أن كل نقطة من محور تناظر الشريط [ق ، ق′] هي مركز لدائرة تمس كلا من المستقيمين (ق) و (ق′) .

البرهان :

ـ نعلم أن محور تناظر الشريط [ق ، ق′] هو المستقيم (Δ) الموازي لكل من (ق) و (ق′) حيث كل نقطة منه متساوية المسافة عن (ق) و (ق′) .

ـ نعلّم نقطة م من (Δ) ، نرسم المستقيم (ل) الذي يشمل م ويعامد كلاً من (ق) و (ق′) في النقطتين أ و أ′ على الترتيب (الشكل 40) .



الشكل (40)

ـ لدينا م أ = م أ′ والنقاط أ ، م ، أ′ على استقامة واحد .

فالنقطة م هي مركز لدائرة (د) قطرها أأ′ أي عرض الشريط :

ـ لدينا (م أ) ⊥ (ق) إذن المستقيم (ق) يمس الدائرة (د) في أ (حسب خواص المماس) .

و (م أ′) ⊥ (ق′) .

إذن المستقيم (ق′) يمس الدائرة (د) في أ′ (حسب خواص المماس) .

نظرية :

كل نقطة من محور تناظر شريط هي مركز لدائرة تمس حدّي هذا الشريط .

ملاحظة :

كل الدوائر التي تمس المستقيمين المتوازيين (ف) و (ف′) متقايسة .

مسألة 2 :

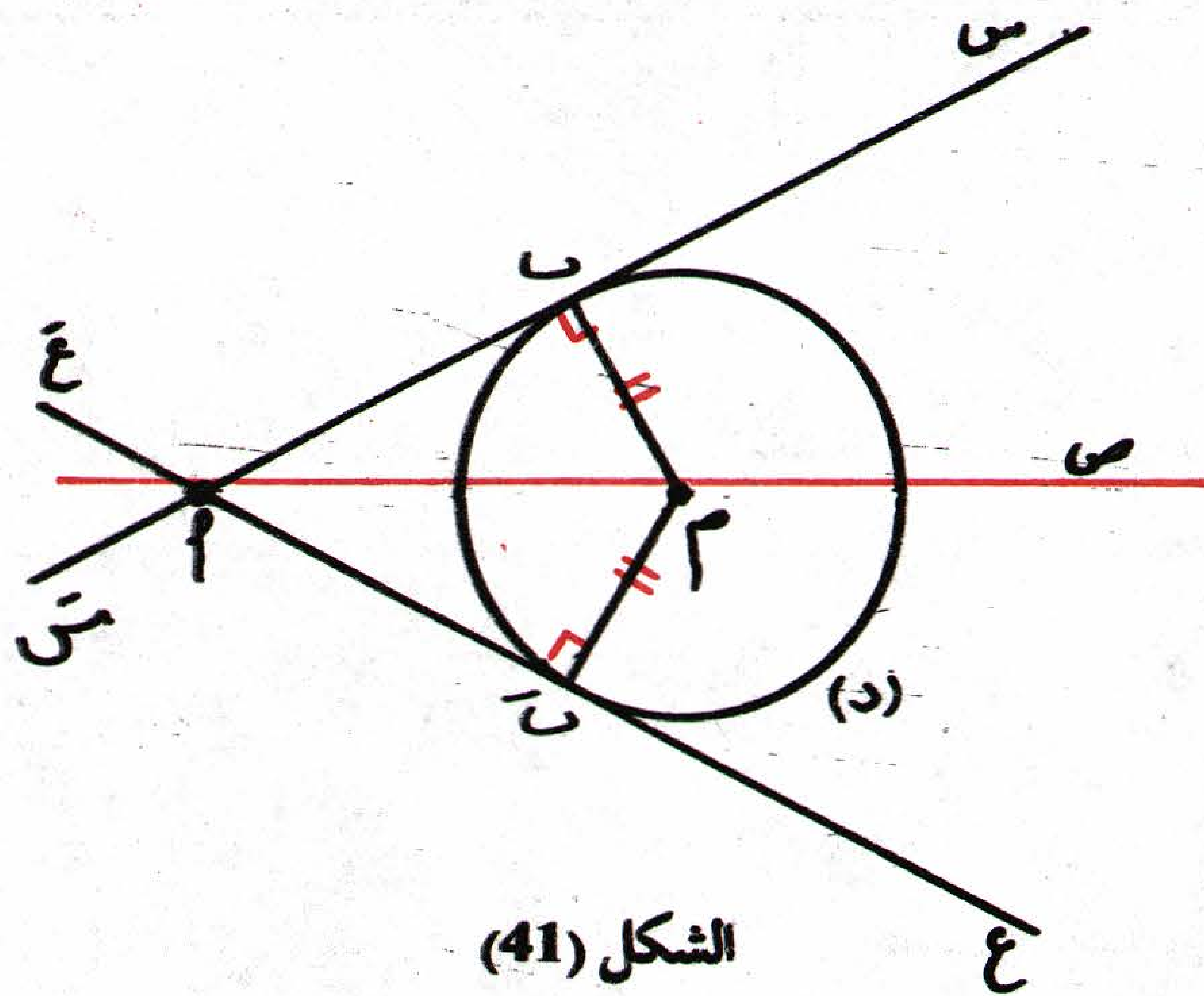
(س س′) و (ع ع′) مستقيمان متقاطعان في النقطة أ .

- لنبرهن أن كل نقطة من منصف الزاوية [أس ، أع] هي مركز لدائرة تمس ضلعي هذه الزاوية .

البرهان :

[أص هو منصف للزاوية [أس ، أع] (الشكل 41)

- ونعلم أن منصّف زاوية هو مجموعة النقط المتساوية المسافة عن ضلعي هذه الزاوية .



الشكل (41)

ـ نعلّم نقطة م من [ا ص ونفرض أن :
ب ، ب′ هما المسقطان العموديان للنقطة م على (س س′) و (ع ع′) على الترتيب .
ـ لدينا م ب = م ب′ . فالنقطة م هي مركز لدائرة (د) تشمل النقطتين ب ، ب′ ونصف قطرها هو المسافة المشتركة للنقطة م عن ضلعي الزاوية [ا س ، ا ع] .
ـ لدينا (م ب) ⊥ (س س′) .
فالمستقيم (س س′) يمس الدائرة (د) في النقطة ب (حسب خواص المماس) .
و (م ب′) ⊥ (ع ع′) .
فالمستقيم (ع ع′) يمس الدائرة (د) في النقطة ب′ (حسب خواص المماس) .

نظرية :

كل نقطة من منصف زاوية هي مركز لدائرة تمس ضلعي هذه الزاوية .

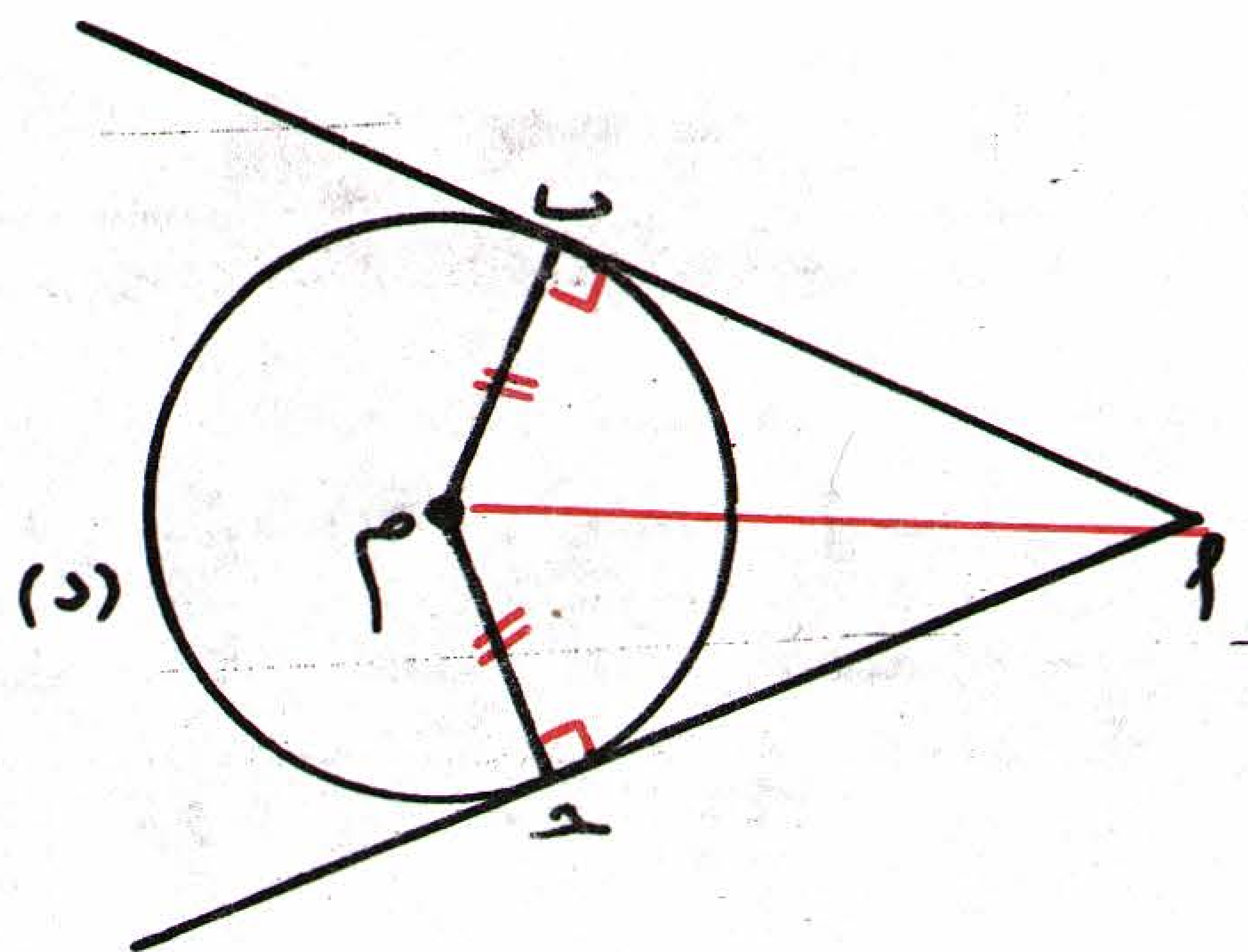
مسألة محلولة

المعطيات :

د (م ، ر) دائرة ، ا نقطة خارجية بالنسبة إليها .
(ا ب) ، (ا حـ) مماسان للدائرة (د) في النقطتين ب ، حـ (الشكل 42)

المطلوب :

1) لنبرهن أن ا ب = ا حـ .
2) لنبرهن أن ا ب م حـ رباعي دائري .



الشكل (42)

البرهان :

1) بما أن (أ ب) مماس للدائرة (د) في ب .

فإن : (أ ب) ⊥ (م ب) .

وبما أن (أ ح) مماس للدائرة (د) في ح .

فإن : (أ ح) ⊥ (م ح) .

فالمثلثان القائمان أ ب م ، أ ح م متقايسان لأن :

- $\widehat{\text{أبم}} = \widehat{\text{أحم}} = 90°$.
- ب م = م ح = نق .
- [أ م] وتر مشترك .

وينتج من تقايس هذين المثلثين أن أ ب = أ ح .

وأن $\widehat{\text{بأم}} = \widehat{\text{حأم}}$ وهذا يعني أن [أ م] هو منصف للزاوية [أ ب ، أ ح] .

2) الرباعي أ ب م ح فيه :

$\widehat{\text{أبم}} = 90°$ و $\widehat{\text{أحم}} = 90°$.

أي $\widehat{\text{أبم}} + \widehat{\text{أحم}} = 180°$.

فالزاويتان المتقابلتان [ب أ ، ب م] و [ح أ ، ح م] في الرباعي أ ب م ح متكاملتان .وهذا يعني أن الرباعي أ ب م ح دائري .

التَّمَارِينُ

1. أ ، ب ، حـ ثلاث نقط من دائرة (ة) ، منصف [ب أ ، ب حـ] يقطع (ة) في النقطة ى . [حـ س تصف مستقيم يقطع القوس الصغرى حـ ى في م .
– برهن أن [هـ ى يتصف الزاوية [هـ أ ، هـ س] .

2. أ ب حـ ى رباعي مرسوم في الدائرة (د) . منصف [ب أ ، ب حـ] يقطع (د) في هـ . ومنصف [ى أ ، ى حـ] يقطع (د) في النقطة ل .
– أثبت أن [هـ ل] قطر في الدائرة (د) .

3. ى (م ، س) دائرة [أ ب] ، [حـ ى] وتران متقايسان هـ و ك هما المسقطان العموديان للنقطة م على (أ ب) و (حـ ى) .
– برهن أن م هـ = م ك .

4. ا ب حـ مثلث متقايس الأضلاع ، د (م ، س) هي الدائرة المحيطة به .
م نقطة من القوس ب حـ التي لا تشمل النقطة أ .
ل نقطة من [م أ] بحيث م ل = م ب .
1) برهن أن المثلث م ب ل متقايس الأضلاع .
2) برهن أن م أ = م ب + م حـ .

5. د (م ، س) دائرة . [أ ب] و [حـ ى] وتران بحيث (ا ب) // (حـ ى) .
– برهن أن محور الوتر [أ ب] هو نفسه محور الوتر [حـ ى] .

6. د (م ، س) دائرة . [أ ب] و [حـ ى] قطران لها .
– برهن أن الوترين [أ حـ] و [ب ى] متقايسان وحامليهما متوازيان .
وأن الوترين [أ ى] ، [ب حـ] متقايسان وحامليهما متوازيان .
واستنتج أن الرباعي ا حـ ب ى مستطيل .

7. أ ب حـ مثلث قائم في أ ، ى نقطة من [ب حـ] بحيث $\widehat{ب أ ى} = \widehat{ا ب حـ}$.
1) ما نوع المثلث ى أ ب؟

2) برهن أن المثلث ى ا ح متساوي الساقين . واستنتج أن ى هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ا ب ح .

8. د (م ، ن) دائرة ، [ا ب] قطر لها ، ﻫ نقطة من (د) تختلف عن ا و ب .

1) برهن أن محور القطعة [ﻫ ا] يشمل النقطة م .

2) برهن أن المثلث ا ب ﻫ قائم في ﻫ .

9. د (م ، ن) دائرة . [ا ب] قطر لها ؛ (ق) محور [م ب] يقطع (د) في النقطتين ح ، ى . المستقيم (م ح) يقطع المستقيم (ا ى) في النقطة ﻫ والقوس $\widehat{\text{ا ى}}$ في ﻫ .

1) برهن أن (م ح) ⊥ (ا ى) .

2) برهن أن ا ح = ا ى وأن ا ى = ح ى .

استنتج أن المثلث ا ح ى متقايس الأضلاع .

10. ا ب ح مثلث قائم في ب ، م منتصف [ا ح] ، [ب ﻫ] عمود متعلق بالوتر [ا ح] .
النقطة و نظيرة ب بالنسبة إلى النقطة ﻫ .

1) برهن أن الرباعي ا ب ح و دائري وأن م هي مركز الدائرة المحيطة بهذا الرباعي .

2) برهن أن $\widehat{\text{ا م ب}} = 2\,\widehat{\text{ا ح ب}}$.

11. د (م ، ن) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ا ب ح . النقطة ى هي المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ح) .
المستقيم القطري (ا م) يقطع (د) في نقطة أخرى ﻫ .

– برهن أن $\widehat{\text{ب ا م}} = \widehat{\text{ح ا ى}}$.

12. ا ب ى ح مثلث قائم في ا . (د) دائرة مركزها ا ونصف قطرها ا ب
و (د) ∩ [ا ح] = {ﻫ} . (ا ى) ارتفاع متعلق بالضلع [ب ﻫ] في المثلث ا ب ﻫ .

1) برهن أن [ا ى منصف للزاوية [ا ب ، ا ﻫ] .

2) برهن أن $\widehat{\text{ا ﻫ ب}} = \frac{1}{2}\,\widehat{\text{ب ا ﻫ}}$.

13. ا ب ح مثلث قائم في ب ، م منتصف [ا ح] ، (ب ﻫ) ⊥ (ا ح) .
ى هي نظيرة ب بالنسبة إلى ﻫ .

1) برهن أن الرباعي ا ب ح ى دائري وأن م هي مركز الدائرة المحيطة به .

2) برهن أن $\widehat{\text{ا م ب}} = 2\,\widehat{\text{ا ى ب}}$.

14. (د) وِ (دَ) دائرتان متقايستان مركزاهما م ، مَ وهما متقاطعتان في النقطتين ا ، ب .
(ق) مستقيم يشمل ا ويوازي (م مَ) ويقطع الدائرتين (د) وِ (دَ) في النقطتين
ح ، حَ على الترتيب .
1) برهن أن ححَ = 2 م مَ .
2) (ل) مستقيم يشمل ا ويقطع الدائرتين (د) وِ (دَ) في هـ ، هـَ على الترتيب . ل ؛
لَ منتصفا الوترين [ا هـ] ، [ا هـَ] على الترتيب . برهن أن (م ل) // (مَ لَ) .
3) برهن أن (م مَ) محور [ا ب] .

15. (ة) نصف دائرة مركزها م وقطرها [ا ب] . ى نقطة من [م ب] . المستقيم
العمودي على (ا ب) في ى يقطع (ة) في ن .
ح نقطة من القوس ن ب . نضع [ا ح] ∩ [ى ن] = { هـ } .
1) بيّن أن الرباعي ى ب ح هـ دائري .
2) المماس في النقطة ح لنصف الدائرة (ة) يقطع (ى ن) في ط .
برهن أن المثلث ط هـ ح متساوي الساقين .

16. (س ع) مستقيم قطري بالنسبة إلى دائرة (د) بحيث :
(س ع) ∩ (د) = { ا ، ب } . ح نقطة من [ب ع] . (ح ص) مستقيم عمودي على
(ا ب) في النقطة ح . (ح ى) هو مماس للدائرة (د) في نقطة ى . المستقيم (ا ى)
يقطع المستقيم (ح ص) في نقطة هـ .
– برهن أن الرباعي ب ى هـ ح دائري .

17. د (م ، نق) دائرة ، [ا ب] قطر لها . ن نقطة من (د) تختلف عن ا و ب .
($ل_1$) ، ($ل_2$) ، ($ل_3$) مماسات للدائرة (د) في النقط ا ، ب ، ن على الترتيب .
($ل_3$) ∩ ($ل_1$) = { ح } ، ($ل_3$) ∩ ($ل_2$) = { ى } .
1) برهن أن ح ا = ح ن وأن (م ح) محور [ا ن] .
2) برهن أن ى ب = ى ن وأن (م ى) محور [ب ن] .
3) برهن أن ح ى = ا ح + ى ب .
4) برهن أن المثلث م ح ى قائم في م .
5) برهن أن ا م ن ح رباعي دائري .

15 الترتيب في ك

1. العلاقة « ... > ... » والعلاقة « ... < ... » في ك :

مثال 1 :

س ، ع عددان ناطقان . أكمل الجدول الآتي :

س	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{3}{7}$	0	$-\frac{8}{9}$
ع	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{-7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{1}{3}$	0
س – ع	$+\frac{1}{21}$			0		$-\frac{1}{3}$	
الفرق	موجب			معدوم		سالب	

نلاحظ أن الفرق س – ع هو عدد ناطق موجب أو سالب أو معدوم .

تعريف :

> س ، ع عددان ناطقان
> • نقول إنَّ س **أكبر من** ع ونكتب س ع إذا كان الفرق س – ع موجبا .
> • نقول إنَّ س **أصغر من** ع ونكتب س ع إذا كان الفرق س – ع سالبا .

مثال 2 :

لنقارن بين العددين الناطقين الموجبين $\frac{7}{5}$ و $\frac{4}{9}$.

• نحسب الفرق $\frac{7}{5} - \frac{4}{9}$.

$$\frac{7}{5} - \frac{4}{9} = \frac{7 \times 9 - 4 \times 5}{5 \times 9} = \frac{63 - 20}{45}$$

أي $\frac{7}{5} - \frac{4}{9} = \frac{43}{45}$.

بما أن الفرق $\frac{7}{5} - \frac{4}{9}$ موجب

فإن $\frac{7}{5} > \frac{4}{9}$.

• لاحظ أيضا أنَّ $7 \times 9 > 4 \times 5$.

بصفة عامة يمكن أن نُبرهنِ على النتيجة الآتية :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$ عددان ناطقان موجبان

• إذا كان $\text{أ} \cdot \text{د} > \text{ب} \cdot \text{ج}$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} > \frac{\text{ج}}{\text{د}}$.

• وإذا كان $\text{أ} \cdot \text{د} < \text{ب} \cdot \text{ج}$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} < \frac{\text{ج}}{\text{د}}$.

نَعلَم أنه إذا كان $\text{أ} \cdot \text{د} = \text{ب} \cdot \text{ج}$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$.

خلاصة :

مهما يكن العددان الناطقان المختلفان س ، ع فيمكن مقارنتهما باستخدام إحدى العلاقتين : « ... < ... » و « ... > ... » .
نحصل على إحدى المتباينتين س < ع أو س > ع .

بصفة عامة :

مهما يكن العددان الناطقان س ، ع فيمكن مقارنتهما باستخدام إحدى العلاقات :
« ... < ... » أو « ... > ... » أو « ... = ... »
فيكون : إما س < ع وإما س > ع وإما س = ع .

تعريف :

- إذا كان « س < ع أو س = ع » نقول إنَّ س **أصغر من ع أو يساويه** ونكتب س ⩽ ع .
- إذا كان « س > ع أو س = ع » ، نقول إنَّ س **أكبر من ع أو يساويه** ونكتب س ⩾ ع .

إذن يمكن **ترتيب** العددين الناطقين س ، ع بإحدى العلاقتين :
« ... ⩽ ... » و « ... ⩾ ... »
كل من هاتين العلاقتين تسمى **علاقة ترتيب** في ك .

تطبيق 1 : مقارنة عدد ناطق موجب بالعدد 1 :

مثال : لنقارن كلاًّ من العددين الناطقين الموجبين $\frac{-3}{-4}$ و $\frac{7}{5}$ بالعدد 1

1) $\frac{-3}{-4} - 1 = \frac{-3+4}{-4} = \frac{+1}{-4} = -\frac{1}{4}$.

– الفرق $\frac{-3}{-1} - 1$ سالب إذن $\frac{-3}{-4} < 1$

لاحظ في هذه الحالة أنَّ $|-3| < |-4|$ أي أنَّ القيمة المطلقة لبسط الكسر أصغر من القيمة المطلقة لمقامه.

2) $\frac{7}{5} - 1 = \frac{7-5}{5} = \frac{2}{5}$.

– الفرق $\frac{7}{5} - 1$ موجب إذن $\frac{7}{5} > 1$.

لاحظ في هذه الحالة أن $7 > 5$.

بصفة عامة :

$\frac{أ}{ب}$ عدد ناطق موجب.

- **إذا كان $|أ| < |ب|$ فإن $\frac{أ}{ب} < 1$.**
- **إذا كان $|أ| > |ب|$ فإن $\frac{أ}{ب} > 1$.**

تطبيق 2 :

مثال : لنقارن بين الأعداد الناطقة $\frac{-8}{7}$ ، $\frac{-3}{4}$ ، $\frac{8}{9}$.

$\frac{-8}{7} < \frac{-3}{4}$ لأن الفرق $\frac{-8}{7} - \frac{-3}{4}$ سالب .

و $\frac{-3}{4} < \frac{8}{9}$ لأن الفرق $\frac{-3}{4} - \frac{8}{9}$ سالب .

وأيضا $\frac{-8}{7} < \frac{8}{9}$ لأن الفرق $\frac{-8}{7} - \frac{8}{9}$ سالب .

فمن المتباينتين $\frac{-8}{7} < \frac{-3}{4}$ و $\frac{-3}{4} < \frac{8}{9}$ نستنتج المتباينة $\frac{-8}{7} < \frac{8}{9}$.

بصفة عامة :

1) **س ، ع ، ص أعداد ناطقة .**
إذا كان س < ع و ع < ص فإن س < ص .

2) **س ، ع ، ص أعداد ناطقة**
إذا كان س ≤ ع و ع ≤ ص فإن س ≤ ص .

1) رتّب الأعداد الناطقة الآتية باستخدام العلاقة « ... ≤ ... »
$\frac{-3}{4}$ ، $\frac{-2}{7}$ ، $\frac{3}{8}$ ، $-\frac{13}{4}$ ، 0 .

2) قارن كلاًّ من الأعداد $\frac{-2}{3}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{7}{5}$ بالعدد 1 .

2. الترتيب والعمليات في ك :

أ) الترتيب والجمع في ك :

مثال :

إليك العددين الناطقين $\frac{-5}{6}$ ، $\frac{-3}{7}$.

لاحظ أن $\frac{-5}{6} < \frac{-3}{7}$ لأن الفرق $\frac{-5}{6} - \frac{-3}{7}$ سالب .

ـ لنقارن بين العددين $\frac{-5}{6} + \frac{1}{2}$ و $\frac{-3}{7} + \frac{1}{2}$

$\frac{-5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{-5+3}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$.

$\frac{-3}{7} + \frac{1}{2} = \frac{-6+7}{14} = \frac{1}{14}$.

$\frac{-1}{3} < \frac{1}{14}$ لأن الفرق $\frac{-1}{3} - \frac{1}{14}$ سالب .

إذن $\frac{-5}{6} + \frac{1}{2} < \frac{-3}{7} + \frac{1}{2}$.

بصفة عامة ، يمكن أن نبرهن على كل من النظريتين الآتيتين :

1) س ، ع ، ص أعداد ناطقة .
إذا كان س $\leqslant$ ع **فإن** س + ص $\leqslant$ ع + ص .

2) **س ، ع ، ص أعداد ناطقة .**
إذا كان $\text{س} + \text{ص} \geqslant \text{ع} + \text{ص}$ فإن $\text{س} \geqslant \text{ع}$.

1) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ عددان ناطقان ، حيث $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{5}{7} \geqslant \frac{\text{حـ}}{\text{ء}} + \frac{10}{7}$.

أثبت أن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \geqslant \frac{\text{حـ}}{\text{ء}} + \frac{5}{7}$.

2) أحسُب $\frac{-3}{5} + \frac{2}{3}$ و $\frac{-2}{7} + \frac{9}{3}$ ثم قارن بين العددين الذين وجدتهما . قارن بين $\frac{-3}{5}$ ، $\frac{-2}{7}$.

ب. الترتيب والضرب :

مثال 1 :

إليك الأعداد الناطقة $\frac{13}{20}$ ، $-\frac{25}{9}$ ، $\frac{3}{4}$.

ـ لنقارن بين $\frac{13}{20} \times \frac{3}{4}$ و $-\frac{25}{9} \times \frac{3}{4}$

لاحظ أن $\frac{13}{20} > -\frac{25}{9}$ وأن $\frac{3}{4} > 0$.

لدينا $\frac{13}{20} \times \frac{3}{4} = \frac{39}{80}$ و $-\frac{25}{9} \times \frac{3}{4} = -\frac{75}{36} = -\frac{25}{12}$

بما أن $0 < \frac{39}{80}$ و $-\frac{25}{12} < 0$ فإن $-\frac{25}{12} < \frac{39}{80}$

فيكون $-\frac{25}{9} \times \frac{3}{4} < \frac{13}{20} \times \frac{3}{4}$.

بصفة عامة يمكن أن نبرهن على النظرية الآتية :

س ، ع ، ص أعداد ناطقة.

إذا كان س $\leqslant$ ع و ص > 0 فإن س $\times$ ص $\leqslant$ ع $\times$ ص

مثال 2 :

إليك الأعداد الناطقة $-\frac{5}{9}$ ، $\frac{7}{8}$ ، $-\frac{1}{2}$.

ـ لنقارن بين $\frac{7}{8} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ و $\left(-\frac{5}{9}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

لاحظ أن $\left(-\frac{5}{9}\right) < \frac{7}{8}$ وأن $\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$.

لدينا $\left(-\frac{5}{9}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{18}$ و $\frac{7}{8} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{16}$.

بما أن $0 < \frac{5}{18}$ و $-\frac{7}{16} < 0$ فإن $-\frac{7}{16} < \frac{5}{18}$ أي $\frac{5}{18} > -\frac{7}{16}$

فيكون $\frac{1}{2} \times \frac{5}{9} > \frac{1}{2} \times \frac{7}{8}$

بصفة عامة يمكن أن نبرهن على النظرية الآتية :

س ، ع ، ص أعداد ناطقة .
إذا كان س ≤ ع وكان ص ≥ 0 فإن س × ص ≤ ع × ص .

3. حاصل القسمة المقرّب :

مثال • إليك العدد 32 .

نعْلَمُ أنَّ $32 = 13 \times 2 + 6$.

أي أن حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد 32 على 13 هما 2 و 6 على الترتيب .

ونعلم أيضا أن 32 محصور بين المضاعفين المتتاليين للعدد 13 وهما 26 و 39 .

نكتب $39 > 32 > 26$.

أي $13 \times 3 > 32 > 13 \times 2$.

نستنتج أنَّ : $\frac{1}{13} \times (13 \times 3) > \frac{1}{13} \times 32 > \frac{1}{13} \times (13 \times 2)$.

أي $3 > \frac{32}{13} > 2$.

العدد 2 هو **حاصل القسمة الصحيح المقرب بالنقصان إلى الوحدة** للعدد 32 على 13

• إليك العدد 320 .

إن حاصل القسمة الصحيح بالقسمة الإقليدية للعدد 320 على 13 هو 24 .

لدينا أيضا $13 \times 25 > 320 > 13 \times 24$.

نستنتج أن $24 < \frac{320}{13} < 25$.

العدد 24 هو حاصل القسمة الصحيح المقرّب بالنقصان إلى الوحدة للعدد 320 على 13 .

إذن $\frac{1}{10} \times 24 < \frac{1}{10} \times \frac{320}{13} < \frac{1}{10} \times 25$.

أي $2,4 < \frac{32}{13} < 2,5$

2,4 هو حاصل القسمة المقرّب بالنقصان إلى $\frac{1}{10}$ للعدد 32 على 13 .

لاحظ أن $2 < 2,4 < \frac{32}{13} < 2,5 < 3$.

• إليك العدد 3200 .

إنّ حاصل القسمة الصحيح بالقسمة الإقليدية للعدد 3200 على 13 هو 246 .

لدينا أيضًا $13 \times 246 < 3200 < 13 \times 247$.

نستنتج أن : $246 < \frac{3200}{13} < 247$.

العدد 246 هو حاصل القسمة الصحيح المقرّب بالنقصان إلى الوحدة للعدد 3200 على 13

إذن $\frac{1}{100} \times 246 < \frac{1}{100} \times \frac{3200}{13} < \frac{1}{100} \times 247$.

أي $2,47 > \frac{32}{13} > 2,46$

2,46 هو حاصل القسمة المقرب بالنقصان إلى $\frac{1}{100}$ أو إلى $\frac{1}{10^2}$ للعدد 32 على 13 .

نستنتج أن : $2 < 2,4 < 2,46 < \frac{32}{13} < 2,47 < 2,5 < 3$.

ملاحظة :

- يمكنك مواصلة البحث عن حواصل القسمة المقرّبة بالنقصان إلى $\frac{1}{10^3}$ أو إلى $\frac{1}{10^n}$ حيث n عدد طبيعي .

نحصل بذلك على أعداد عشرية أقرب فأقرب إلى القيمة الحقيقية للعدد الناطق $\frac{32}{13}$.

تطبيق :

- لنبحث عن حواصل القسمة المقرّبة بالنقصان إلى 1 أو إلى $\frac{1}{10}$ أو إلى $\frac{1}{10^2}$ أو إلى $\frac{1}{10^n}$ في قسمة 32,7 على 13,42 .

لدينا $\frac{32,7}{13,42} = \frac{100 \times 32,7}{100 \times 13,42} = \frac{3270}{1342}$.

ـ لاحظ أن كلاً من القاسم والمقسوم أصبح عددًا صحيحًا .

إذن حواصل القسمة المقربة إلى 1 أو إلى $\frac{1}{10}$ أو إلى $\frac{1}{10^2}$ أو إلى $\frac{1}{10^م}$ بالنقصان في قسمة 32,7 على 13,42 هي على الترتيب حواصل القسمة المقربة إلى 1 أو إلى $\frac{1}{10}$ أو إلى $\frac{1}{10^2}$ أو إلى $\frac{1}{10^م}$ بالنقصان في قسمة 3270 على 1342 .

الطريقة العملية لإيجاد حاصل القسمة :

32,70	13,4
5860	
4920	2,436
8940	
888	

32	13
60	
80	2,46
2	

التَّمَارِينُ

1. قارن بين :

$\frac{-2}{3}$ و $\frac{-3}{2}$ ؛ $\frac{-1}{2}$ و $\frac{-3}{5}$ ؛ $\frac{-1}{4}$ و $\frac{1}{-15}$ ؛ $\frac{9}{-7}$ و $\frac{9}{-5}$ ؛ $\frac{4}{7}$ و $\frac{6}{11}$.

2. قارن بين :

$\frac{11}{7}$ و 2 ؛ -4 و $\frac{-14}{3}$ ؛ $\frac{-13}{30}$ و $\frac{-14}{45}$ ؛ $\frac{-5}{9}$ و $\frac{9}{-5}$.

3. قارن بين : $-\frac{144}{162}$ و $-\frac{612}{1932}$ ؛ $\frac{429}{357}$ و $\frac{5582}{621}$ ؛ $\frac{-12}{13}$ و $\frac{-13}{14}$.

4. 1) قارن بين العددين $\frac{-4}{-5}$ و $\frac{8}{7}$.

2) احسبْ $\frac{-4+8}{-5+7}$ ، ثم قارن بين العدد المحصل عليه وكل من العددين $\frac{-4}{-5}$ و $\frac{8}{7}$.

5. 1) قارن بين $\frac{-4}{3}$ و $\frac{5}{-7}$.

2) احسبْ $\frac{-4}{3}+1$ و $\frac{5}{-7}+1$ ، ثم قارن بين العددين الذين وجدتهما .

3) احسب $\frac{-3}{5}-1$ و $\frac{5}{-7}-1$ ، ثم قارن بين العددين الذين وجدتهما .

6. 1) رتّب ترتيبا تصاعديا الأعداد الناطقة التالية :

$\frac{1}{-2}$ ، $-\frac{5}{11}$ ، $-\frac{12}{7}$ ، -4 ، $-\frac{1}{3}$ ، $\frac{9}{4}$ ، 0 ، $\frac{7}{6}$.

2) رتّب ترتيبا تنازليا الأعداد الناطقة الآتية :

$\frac{7}{4}$ ، -9 ، $\frac{-17}{3}$ ، 0 ، -1 ، $\frac{1}{5}$ ، 7 .

7. أ ، ب عددان صحيحان (ب $\neq 0$) ، حيث $\frac{5}{3} > \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

بيّن أنّ :

1) $\frac{35}{6} \geqslant \frac{7\text{أ}}{2\text{ب}}$.

2) $\frac{-5}{2} \leqslant \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{-3}{2}$.

8. أ عدد صحيح ، حيث $-5 \leqslant \frac{7\text{أ}}{4}$.

بيّن أنّ : $-\frac{5}{7} \leqslant \frac{\text{أ}}{4}$ ؛ $-20 \leqslant 7\text{أ}$ ؛ $\frac{1}{7} \geqslant \frac{-\text{أ}}{20}$.

9. أ ، ب عددان صحيحان (ب $\neq 0$) ، حيث $\frac{2}{3} \leqslant \frac{7}{4} + \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

بيّن أنّ : $\frac{5}{3} \leqslant \frac{11}{4} + \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ؛ $-\frac{4}{3} \leqslant \frac{1}{4} - \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

10. أ ، ب عددان صحيحان (ب $\neq 0$) ، حيث $1 \geqslant \frac{2}{5} + \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{3}{4}$.

بيّن أنّ : $\frac{4}{5} \geqslant \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

11. ا) رتّب تصاعديا الأعداد الناطقة $\frac{50}{30}$ ، $\frac{25}{15}$ ، $\frac{5}{3}$ ، $\frac{7}{3}$.

تحقق أنّ : $1,7 > \frac{5}{3} > 1,6$ و $1,67 > \frac{5}{3} > 1,66$ و $1,667 > \frac{5}{3} > 1,666$.

ثمّ استنتج الكتابة :

$$2 > 1,7 > 1,67 > 1,667 > \frac{5}{3} > 1,66 > 1,6 > 1,5 > 1 .$$

ب) بين أنّ :

. $3>2$ و $4>2,34>2,334>2,3334>\frac{7}{3}>2,3333>2,333>2,33>2$ و $3>2$

12. احصر العدد 207,9463 بين عددين عشريين فرقهما 0,01 .

13. احسُبْ المجموع $\frac{109}{90}+\frac{71}{90}$ والفرق $\frac{109}{90}-\frac{71}{90}$ ، ثم احصر هذا الفرق بين عددين عشريين يكون الفرق بينهما 0,0001 .

14. عيّن الأعداد العشرية من بين الأعداد الناطقة الآتية :

$\frac{17}{64}$ ، $\frac{213}{125}$ ، $\frac{5}{16}$ ، $\frac{12}{30}$ ، $\frac{27}{45}$ ، $\frac{17}{30}$ ، $\frac{19}{32}$ ، $\frac{19}{80}$ ، $\frac{631}{250}$.

ـ اكتب الأعداد العشرية التي وجدتها باستعمال الفاصلة ، ثم رتّبها تصاعديًا .

15. $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$ ، $\frac{هـ}{و}$ أعداد ناطقة بحيث $\frac{6}{7}+\frac{ج}{د}\geqslant\frac{4}{5}+\frac{أ}{ب}$ و $\frac{1}{5}+\frac{هـ}{و}\geqslant\frac{18}{21}+\frac{ج}{د}$

ـ برهن أنّ : $\frac{3}{5}-\frac{هـ}{و}\geqslant\frac{أ}{ب}$ واستنتج أن $\frac{هـ}{و}>\frac{3}{5}+\frac{أ}{ب}$ ، قارن بين $\frac{أ}{ب}$ و $\frac{هـ}{و}$.

16 مبادىء أولية في الهندسة الفضائية

مفهوم الفضاء :

• سبق لك أن رأيت بعض الأجسام مثل : المكعب ، متوازي المستطيلات ، الهرم ، الكرة ، الأسطوانة .

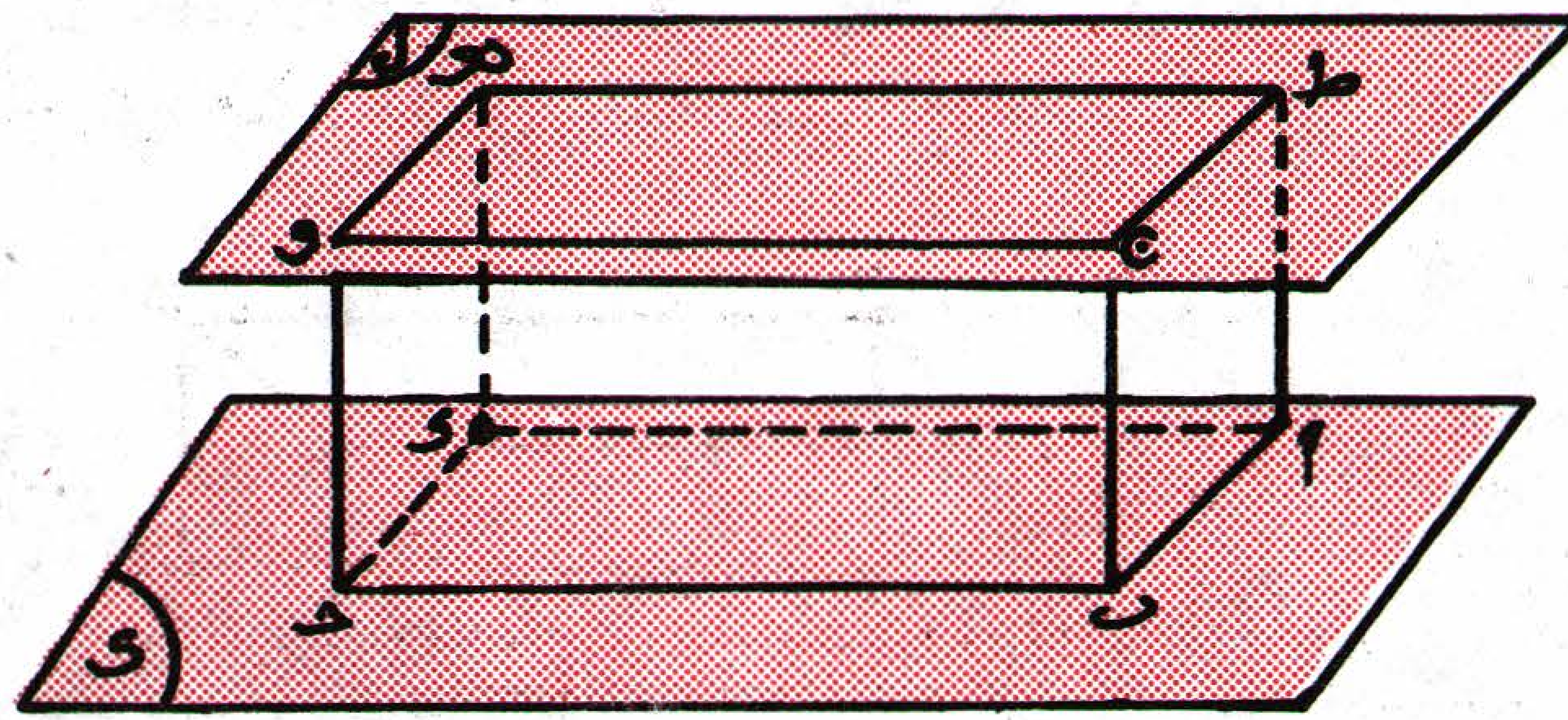
• كلٌّ من هذه الأجسام هو جزء من الفضاء . لاحظ أن هناك **سطوح مستوية** كما في المكعب ومتوازي المستطيلات ، وهناك **سطوح منحنية** كما في الكرة والسطح الجانبي للأسطوانة .

ـ الفضاء هو مجموعة غير منتهية من النقط .
ـ المستوي هو جزء من الفضاء يختلف عنه .

الأوضاع النسبية لمستويين :

أ) المستويان المتوازيان :

في الشكل(1)، أ ب جـ د هـ و ي ط متوازي مستطيلات ، كل وجه منه هو جزء من مستوٍ



الشكل (1)

• الوجهان المتقابلان هما جزءان من مستويين متوازيين .

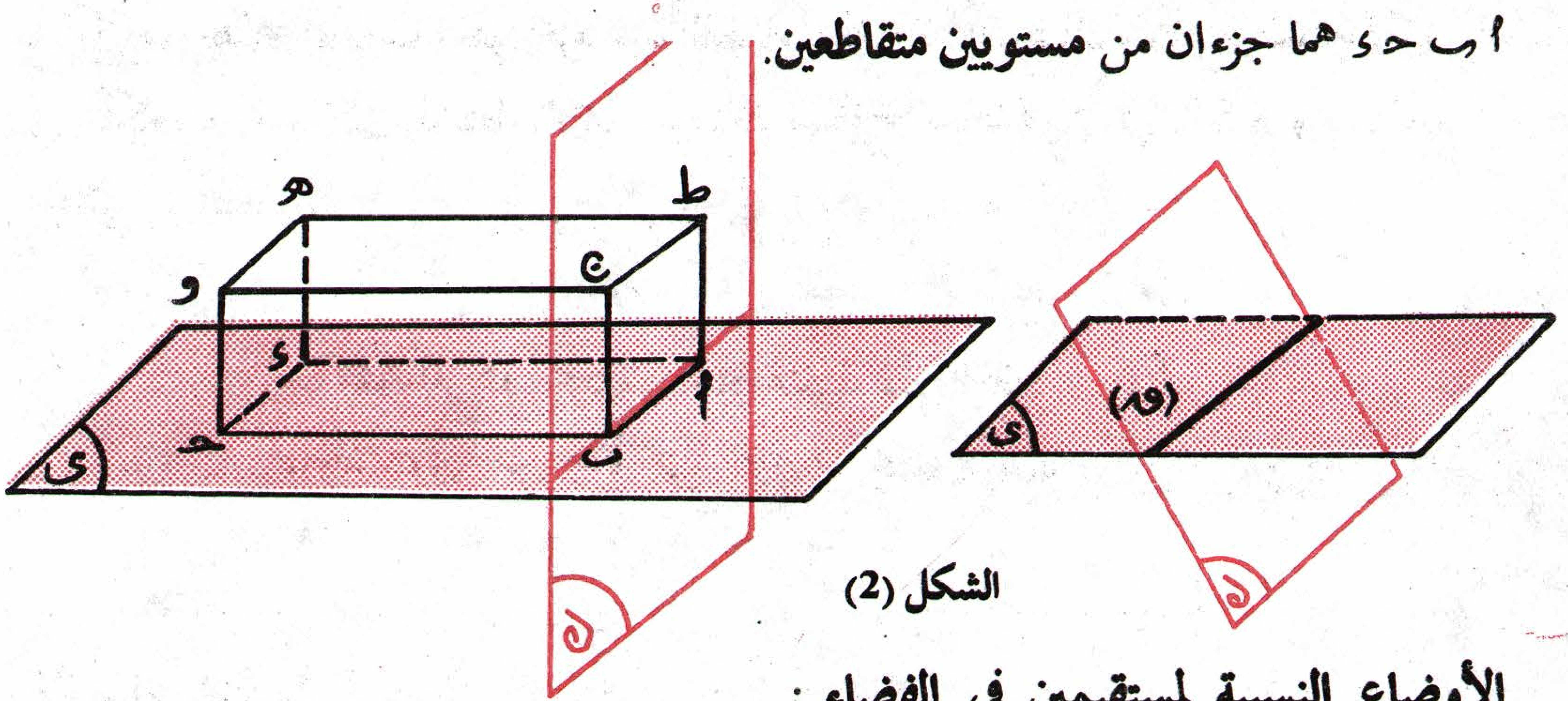
إذن (ى) و (ل) هما مستويان متوازيان .

لاحظ أن (ى) ∩ (ل) = ϕ .

ب) المستويان المتقاطعان :

في الشكل(2)، الوجهان ا ب ن ط ،

ا ب حـ ء هما جزءان من مستويين متقاطعين.



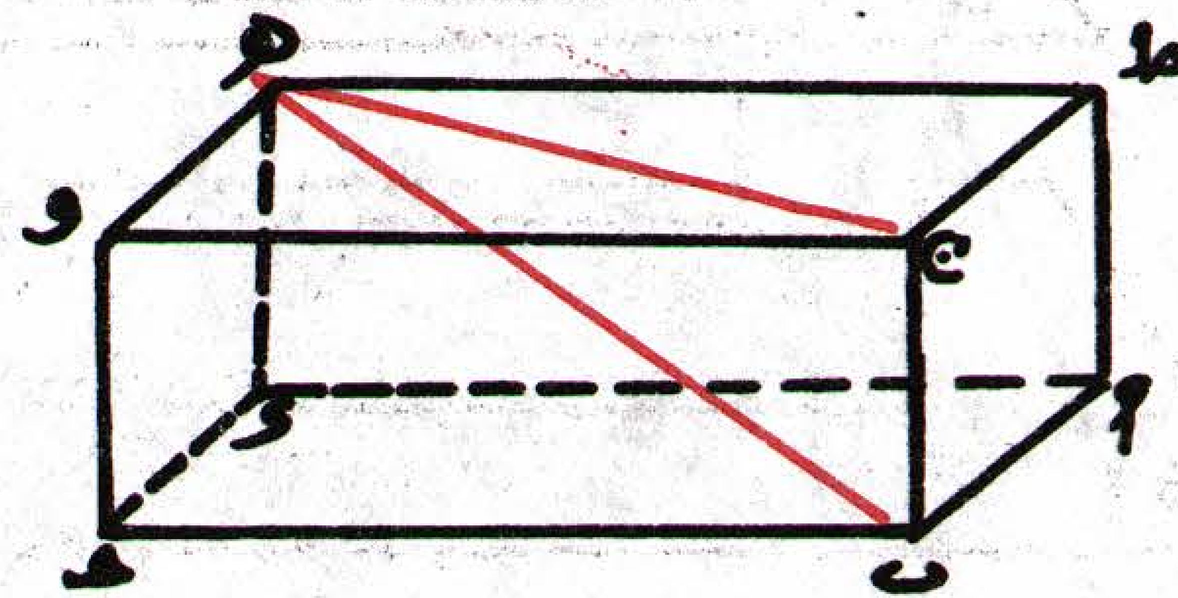
الشكل (2)

الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء :

الشكل(3) يمثّل متوازي مستطيلات . كل حرف من أحرفه هو قطعة مستقيمة في الفضاء .

ـ كلٌّ من الوجهين ط ن و هـ ، ب حـ و ن هو مستطيل ، فالمستقيمات (ط هـ) ، (ن و) ، (ب حـ) متوازية في الفضاء.

ـ اذكر مستقيمات أخرى متوازية في هذا الشكل .



(الشكل 3)

لاحظ أن هذه المستقيمات غير محتواة كلها في مستو واحد .

ـ ارسم [ﻫ ﻫ] قطر المستطيل ط ﻫ و ﻫ .

لاحظ أن المستقيمين (ﻫ ط) ، (ﻫ ﻫ) مشتركان في النقطة ﻫ فهما متقاطعان .

• المستقيمات (ﻫ ط) ، (ﻫ ﻫ) ، (ﻫ و) متقاطعة في النقطة ﻫ وهي محتواة في مستو واحد .

• المستقيمات (ﻫ ط) ، (ﻫ و) ، (ﻫ ب) متقاطعة في النقطة ﻫ وهي غير محتواة في مستو واحد ، فهي **متقاطعة في الفضاء** :

ـ اذكر مستقيمات أخرى متقاطعة في الفضاء في هذا الشكل .

• المستقيمان (ﻫ ﻫ) ، (ا ب) غير متوازيين وغير متقاطعين وغير محتويين في مستو واحد نسميهما **مستقيمين متخالفين** .

لاحظ أن هذين المستقيمين لا يعيّنان مستويًا .

ـ اذكر في هذا الشكل مستقيمات أخرى متخالفة .

الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو :

1) المستقيم القاطع لمستو :

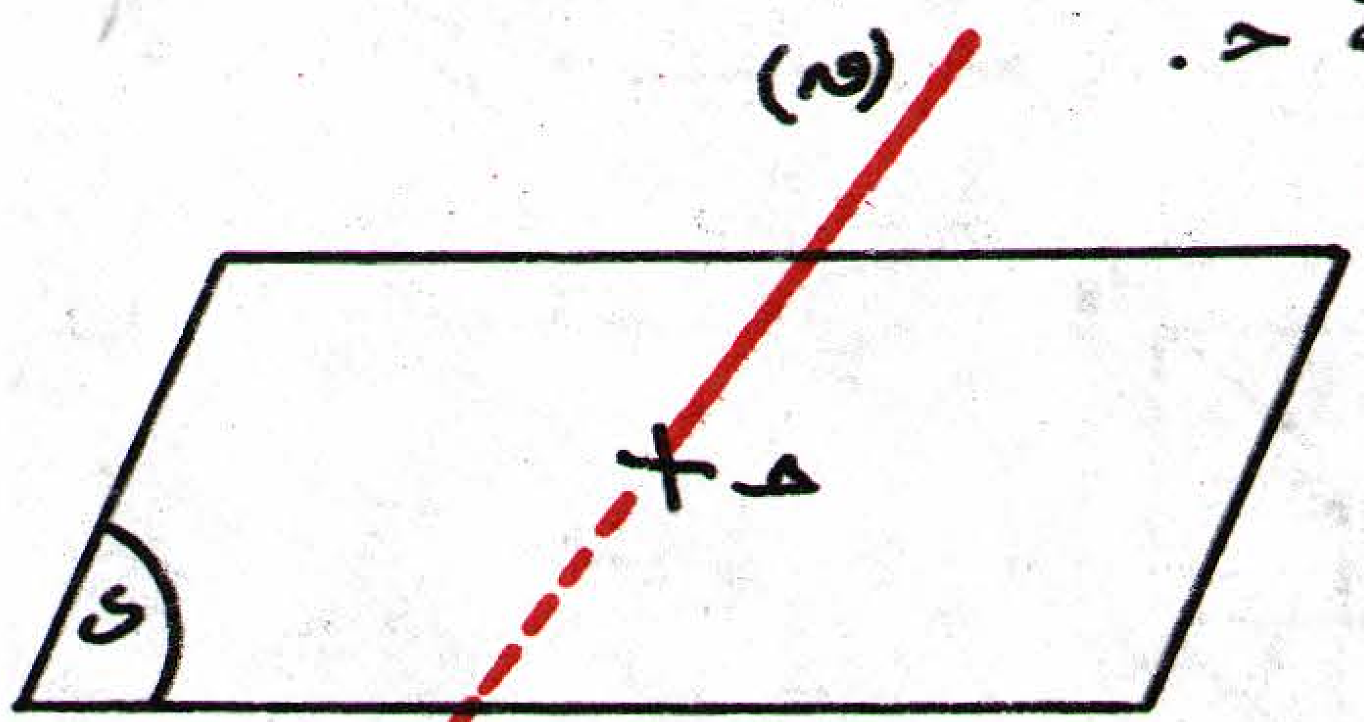
ـ ارسم [ﻫ ح] قطر لمستطيل ﻫ ب ح و (الشكل 3)

لاحظ أنّ (ﻫ ح) ∩ (ى) = { ح } .

المستقيم (ﻫ ح) يقطع المستوي (ى) في النقطة ح .

وأيضا (و ح) ∩ (ى) = { ح } (الشكل 3) .

المستقيم (و ح) عمودي على المستوي (ى) .

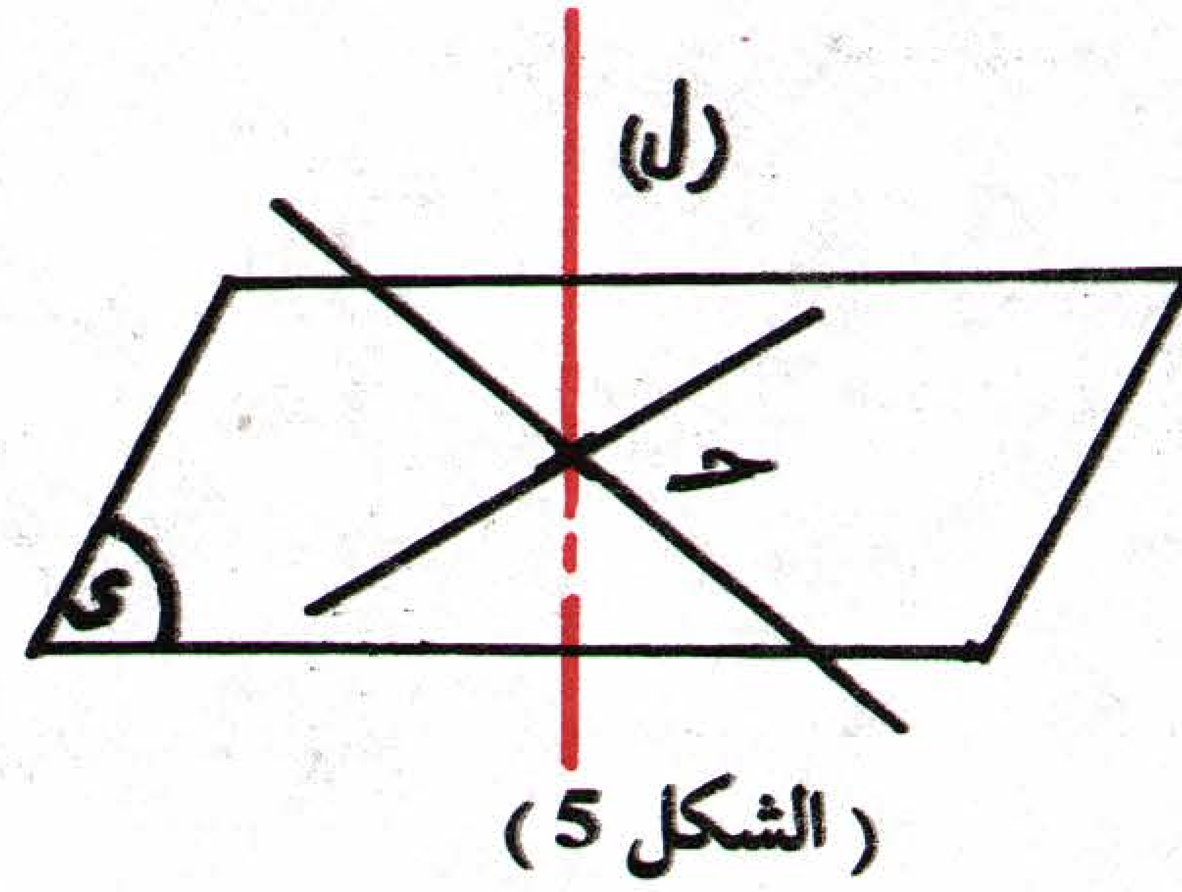


(الشكل 4)

(ه) يقطع المستوي (ى) .

ملاحظة :

لكي يكون مستقيم عموديًا على مستو يكفي أن يعامد مستقيمين في هذا المستوي متقاطعين في نقطة التعامد.



(الشكل 5)

(ل) عمودي على المستوي (ي) في النقطة ح

2) المستقيم الموازي لمستو :

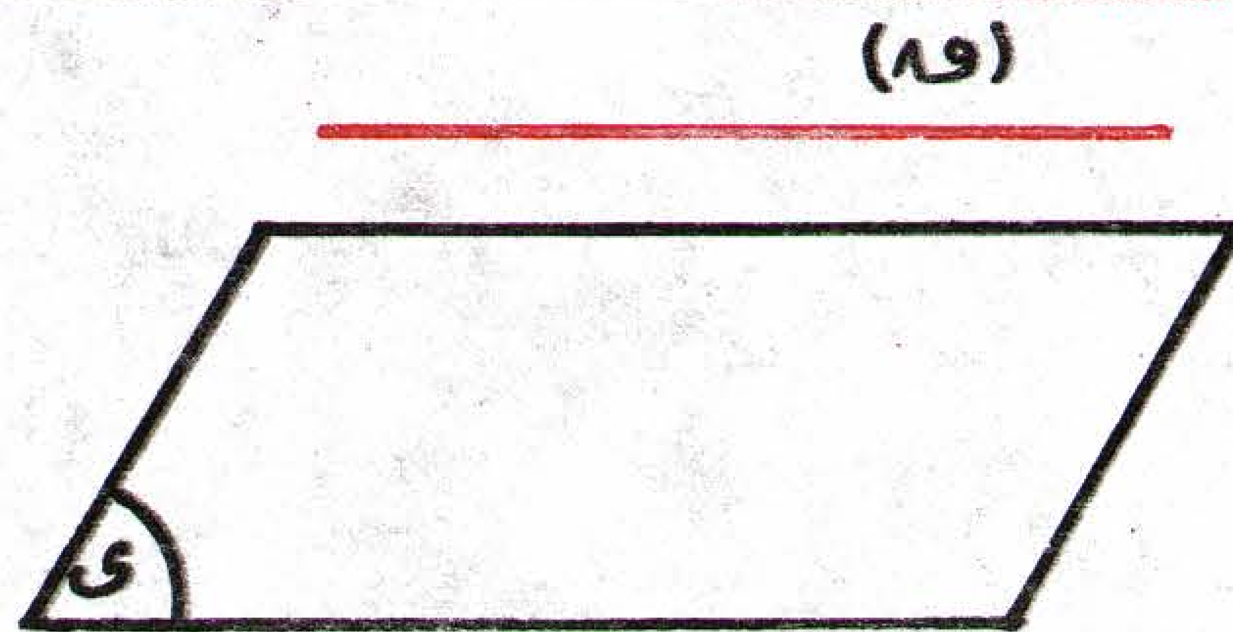
لاحظ أن المستقيم (م و) لا يشترك مع المستوي (ى) في أية نقطة أي (و م) لا يقطع (ى) . (الشكل 3) .

نقول إن المستقيم (م و) يوازي المستوي

أيضا كلّ من (م ط) ، (م ه) ، (و ه) وهو مستقيم يوازي المستوي (ى) .

يمكننا أن ننّص على ما يلي :

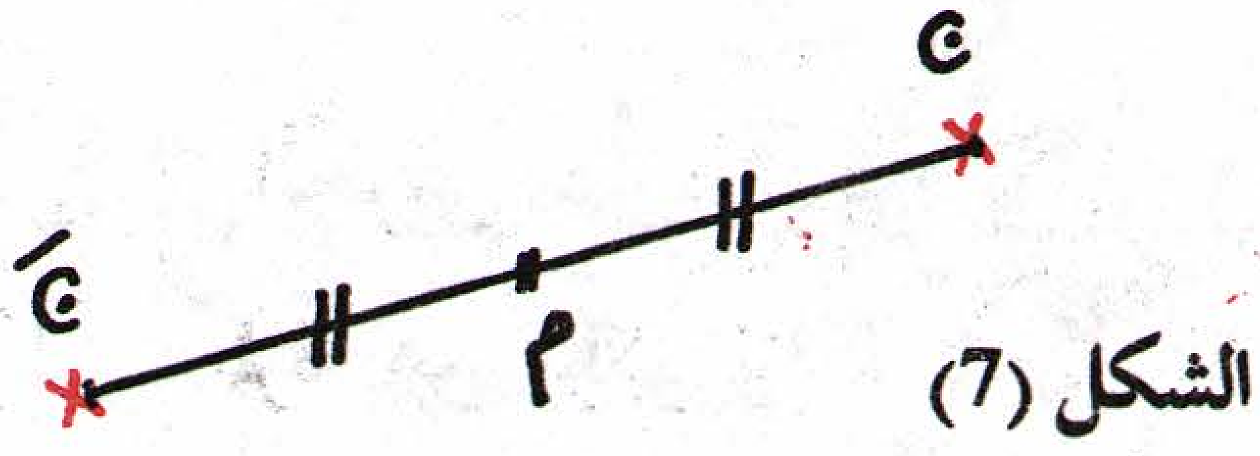
إذا كان (ى) ، (ك) مستويين متوازيين فإن كل مستقيم من أحد هذين المستويين يوازي المستوي الآخر.



الشكل (6)

التناظر في الفضاء :

أ) التناظر بالنسبة إلى نقطة :



الشكل (7)

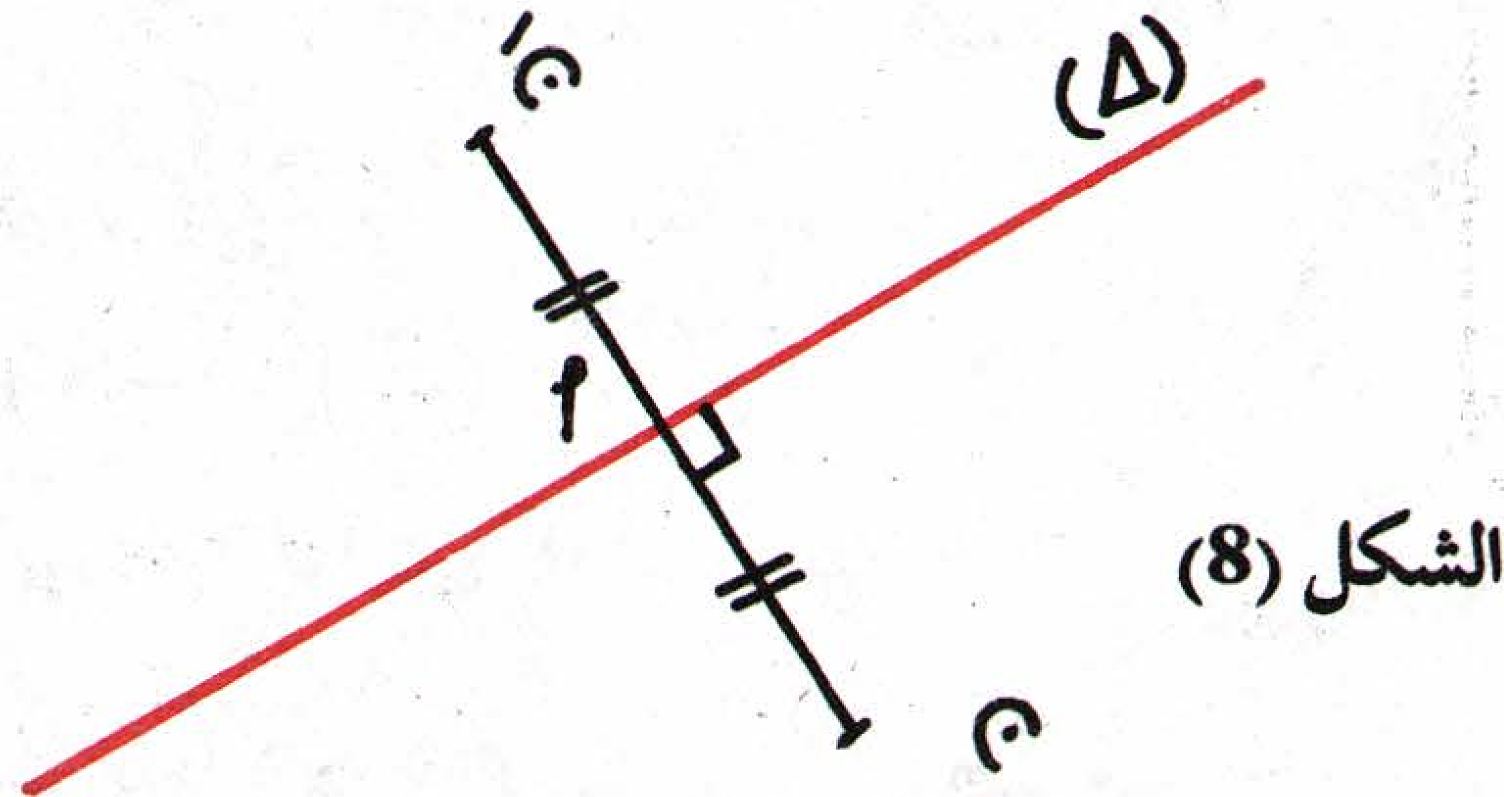
لاحظ الشكل 7 .

تعريف :

م نقطة من الفضاء .
نظيرة نقطة ن من الفضاء بالنسبة إلى م هي النقطة نَ من الفضاء حيث م منتصف [ن نَ] .

ب) التناظر بالنسبة إلى مستقيم :

إليك الشكل 8 حيث (∆) مستقيم من الفضاء ، ن نقطة من الفضاء مسقطها العمودي على (∆) هو أ ، نَ هي نقطة من الفضاء حيث أ منتصف القطعة [ن نَ] .



الشكل (8)

النقطة نَ تسمى **نظيرة** ن بالنسبة إلى المستقيم (∆) .
لاحظ أن (∆) هو محور [ن نَ] .

تعريف :

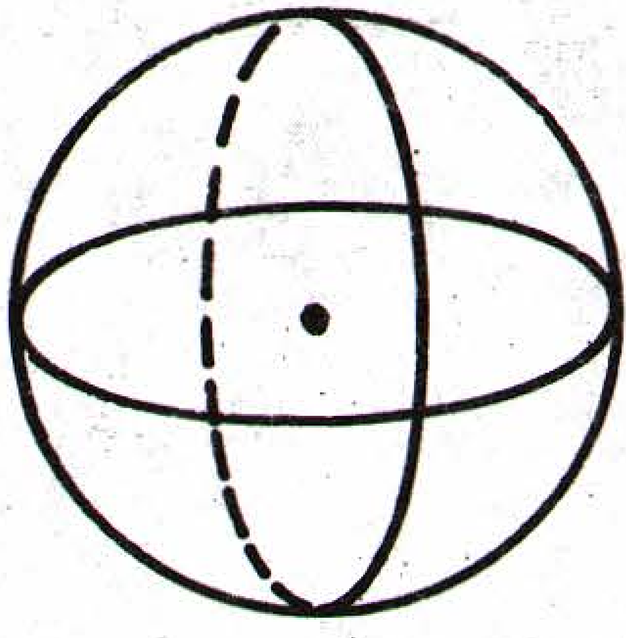
(∆) مستقيم في الفضاء .
نظيرة نقطة ن من الفضاء بالنسبة إلى (∆) هي النقطة نَ من الفضاء حيث (∆) هو محور [ن نَ] .

• كل نقطة من المستقيم (∆) هي نظيرة نفسها بالنسبة إلى (∆) .

أمثلة :

مثال 1 : الكرة : الشكل 9 .

- مركز الكرة هو مركز تناظر لها .
- كل مستقيم قطري هو محور تناظر لها .



الشكل (9)

مثال 2 : الأسطوانة الدورانية : الشكل (10)

- المستقيم (م$_1$م$_2$) هو محور تناظر لها .



الشكل (10)

التَّمَــــارِيــــنُ

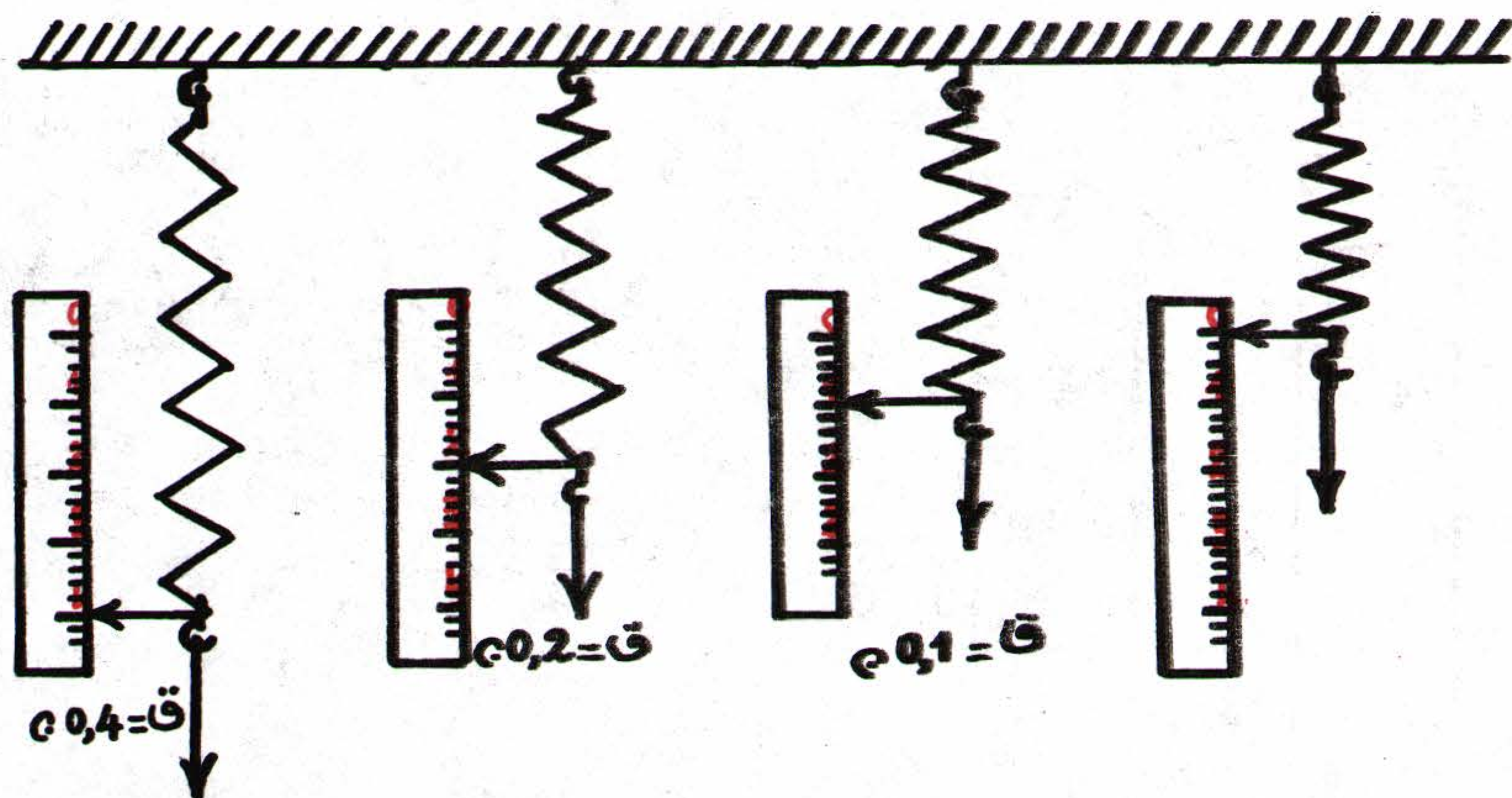
1. عين مركز تناظر مكعب . ثم عين محاورُه ومستوياته المحورية .
2. عين محور تناظر مخروط دوراني .
3. عين مركز تناظر متوازي مستطيلات . ثم عين محاوره ومستوياته المحورية .

17 تطبيقات في ك

1. النسبة والتناسب :

مثال 1 :

لاحظ مخطط التجربة الفيزيائية الآتية :



التجربة تبيّن أنه كلّما أثّرنا بقوة ق على الطرف الحر للنابض فإن النابض يستطيل بمسافة معينة س .

إليك الجدول حيث القوة ق تقاس بالنيوتن والاستطالة بالسنتيمتر .

الأوضاع	الوضع الأول	الوضع الثاني	الوضع الثالث
القوة ق	0,1	0,2	0,4
الاستطالة س	1	2	4
$\frac{ق}{س}$	0,1	0,1	0,1

نلاحظ في الجدول أن حاصل قسمة القوة على الاستطالة هو العدد الثابت 0,1 .
أي أن نسبة القوة ق إلى الاستطالة س ثابتة .

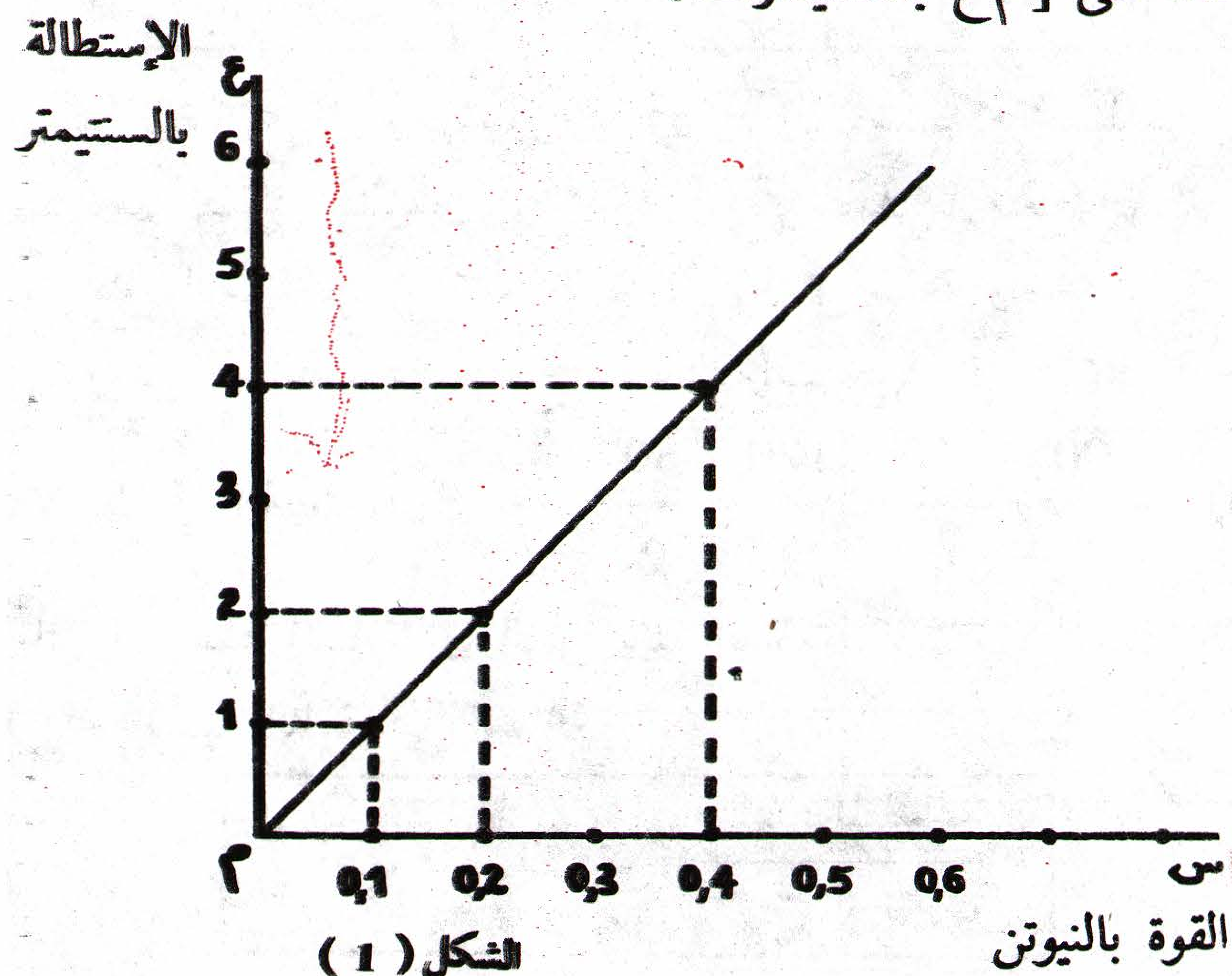
نكتب $\frac{0,1}{1} = \frac{0,2}{2} = \frac{0,4}{4} = 0,1$.

كل من المساويات $\frac{0,1}{1} = \frac{0,2}{2}$ و $\frac{0,1}{1} = \frac{0,4}{4}$ و $\frac{0,2}{2} = \frac{0,4}{4}$ تسمى **تناسبا** .

نقول إن الأعداد 0,1 ، 0,2 ، 0,4 **متناسبة** على الترتيب مع الأعداد 1 ، 2 ، 4 .

- يمكننا أن نمثل بيانيا المعلومات الواردة في الجدول السابق كما في الشكل 1 . حيث [م س و [م ع نصفا مستقيمين حاملاهما متعامدان .

نمثل القوة على [م س حيث 1 سم يمثل 0,1 نيوتن .
ونمثل الاستطالة على [م ع بالستيمترات .



الشكل (1)

• النقط التي مركباتها الأولى متناسبة مع مركباتها الثانية تنتمي إلى **مستقيم واحد** يشمل المبدأ م .

ملاحظة :

العلاقة بين الاستطالة س للنابض إذا أثرنا عليه بقوة ق هي :

ق = ا س حيث ا عدد يسمى ثابت المرونة ويتوقف على المادة التي يصنع منها النابض .

مثال 2 :

الجدول الآتي يبيّن المسافات التي يقطعها متحرك في فترات زمنية معيَّنة .

المسافات المقطوعة بالكيلومترات	40	80	120	160	200
الزمن بالساعات	1	2	3	4	5

يمكن التعبير عن المعلومات الواردة في الجدول باستخدام مخطط كما في الشكل 2 .

ـ نرسم نصفي مستقيمين [م س ، [م ع حاملاهما متعامدان .

ـ نمثل الزمن على [م س حيث 1 سم يمثل ساعة واحدة .

ـ ونمثل المسافات على [م ع بالسنتيمترات حيث 1 سم يمثل 40 كم

لاحظ في الجدول أنَّ : $\frac{40}{1} = \frac{80}{2} = \frac{120}{3} = \frac{160}{4} = \frac{200}{5} = 40$

أي أنَّ نسبة المسافة إلى الزمن ثابتة أثناء الحركة .

هذه النسبة الثابتة هي **السرعة** .

ونكتب : السرعة = $\frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن المستغرق}}$

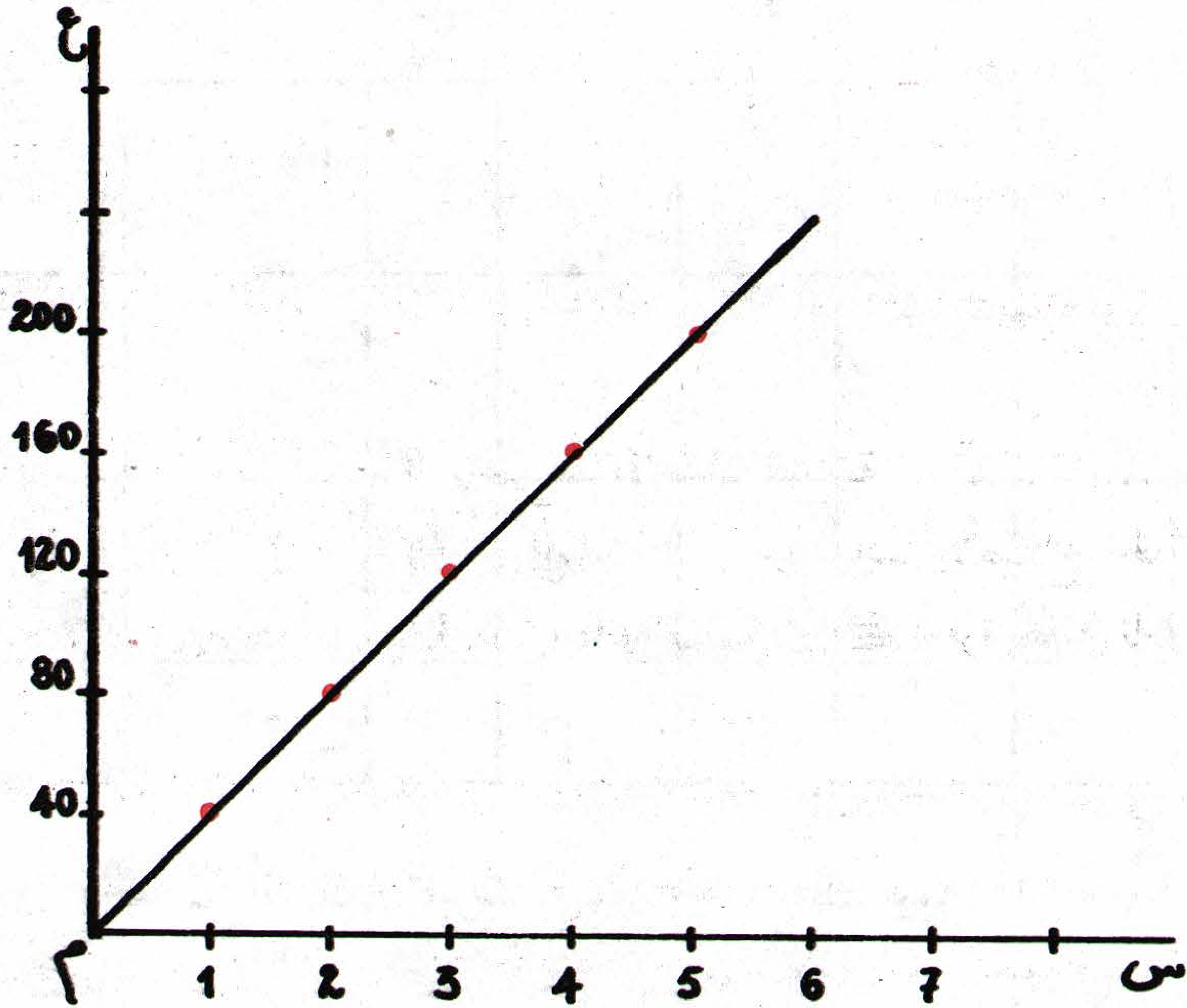
ملاحظة :

بما أن السرعة ثابتة ، فإن **الحركة منتظمة** .

ـ إليك الثنائيات المرتبة ، حيث كل ثنائية تمثل نقطة من المستوي .

(1 ، 40) ، (2 ، 80) ، (3 ، 120) ، (4 ، 160) ، (5 ، 200) .

ـ لاحظ أن مركباتها الأولى متناسبة مع مركباتها الثانية على الترتيب .



الشكل (2)

وأنَّ هذه النقط تنتمي إلى المستقيم الذي يشمل النقطة م .

> ـ ما هي المسافة التي قطعها المتحرك بعد 3 ساعات ونصف ؟
> ـ ما هو الزمن الذي استغرقه المتحرك لقطع مسافة 300 كم ؟

2. وحيدات الحد لمتغير واحد :

• في المثال 1 عاملا الجُداء أس هما الثابت أ والمتغير س .

الجُداء أس يسمى **وحيد حد** للمتغير الناطق س ، العدد الناطق الثابت أ يسمى **معامل** وحيد الحد أس .

• أكمل الجدول الآتي ، حيث س عدد ناطق متغير .

س	-1	$\frac{1}{2}$	0	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
2 س	-2	1	0		2		$\frac{3}{2}$
$-\frac{2}{3}$ س^2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{3}{8}$
5 س^3	-5		0		5		

• لاحظ في الجدول أنه كلما تغيّرت قيمة س ، فإن قيمة كل من الجداءات

2 س ، $\frac{-2}{3}$ س^2 ، 5 س^3 تتغير .

2 س ، $-\frac{2}{3}$ س^2 ، 5 س^3 هي **وحيدات حد** للمتغير س .

الأعداد الثابتة 2 ، $-\frac{2}{3}$ ، 5 هي **معاملاتها** على الترتيب .

• أُسّ المتغير يسمى **درجة** وحيد الحد .

مثلاً :

وحيد الحد 2 س من الدرجة الأولى .

وحيد الحد $-\frac{2}{3}$ س^2 من الدرجة الثانية .

وحيد الحد 5 س^3 من الدرجة الثالثة .

تعريف :

وحيد الحد لمتغير ناطق س هو جُداء من الشكل أ س^ن

حيث : أ عدد ناطق **ثابت** ، س عدد ناطق **متغير** و ن عدد طبيعي

ـ العدد الثابت أ يسمى **معامل** وحيد الحد أ س^ن .

ـ إذا كان المعامل أ غير معدوم ، فإن العدد ن يسمى **درجة** وحيد الحد أ س^ن .

كل عدد ناطق ثابت غير معدوم أ هو وحيد من الدرجة 0 .

- وحيدات الحد التي لها نفس المتغير ونفس الدرجة تسمى **وحيدات حد متشابهة** .

أمثلة : 1) $-\frac{3}{2}$ س^4 ، 6 س^4 ، $-$ 2 س^4 هي وحيدات حد متشابهة .

2) $-$ 7 س^2 ، $-$ 7 س^3 ، $\frac{5}{6}$ س^5 ، $\frac{10}{11}$ س هي وحيدات غير متشابهة .

1) عيّن معامل ودرجة كل من وحيدات الحد الآتية :

$-$ س ، س^2 ، $\frac{1}{2}$ س^3 ، $\frac{-5}{-3}$ س^2 .

2) اذكر أربعة وحيدات حد مختلفة للمتغير س من الدرجة الثالثة .

3) اذكر أربعة وحيدات حد متشابهة للمتغير س .

تطبيقات

1) جداء وحيدي حد :

مثال : لنحسب الجداء $15س^3 \times \left(-\frac{3}{4}س^2\right)$.

$$15س^3 \times \left(-\frac{3}{4}س^2\right) = 15 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times (س^3 \times س^2) .$$

$$15س^3 \times \left(-\frac{3}{4}س^2\right) = -\frac{45}{4}س^5$$ لأن الضرب في ك تبديلي وتجميعي .

2) حاصل قسمة وحيد حد على آخر :

مثال 1 : لنحسب حاصل قسمة وحيد الحد $15س^3$ على وحيد الحد غير المعدوم $-5س^2$.

$$15س^3 : (-5س^2) = \frac{15س^3}{5س^2} = \left(\frac{15}{-5}\right) \times \left(\frac{س^3}{س^2}\right)$$

$$\frac{15س^3}{-5س^2} = (-3) \times س^{3-2} = -3س$$

أي $15س^3 : (-5س^2) = -3س$.

لاحظ في هذه الحالة أن درجة $15س^3$ أكبر من درجة $(-5س^2)$ وأن حاصل القسمة هو **وحيد حد** معامله حاصل قسمة معامل الأول على معامل الثاني . ودرجته هي فرق درجتيهما .

مثال 2 : إليك وحيدي الحد -8س ، 2س^2 حيث $\text{س} \neq 0$.

لدينا : $\dfrac{-8\text{س}}{2\text{س}^2} = \left(\dfrac{-8}{2}\right) \times \left(\dfrac{\text{س}}{\text{س}^2}\right) = -4\text{س}^{1-2} = -4\text{س}^{-1}$

لاحظ في هذه الحالة أن درجة -8س أصغر من درجة 2س^2 و أس س^{-1} ليس عددًا طبيعيًا .

إذن حاصل قسمة وحيد الحد -8س على وحيد الحد 2س^2 **ليس وحيد حد** .

يمكن أن نكتب : $\dfrac{-8\text{س}}{2\text{س}^2} = \dfrac{-4}{\text{س}}$.

هذا الحاصل يسمى **عبارة جبرية كسرية** (المتغير موجود في المقام)

مثال 3 : س عدد ناطق غير معدوم .

$\dfrac{-7\text{س}^3}{4\text{س}^3} = \left(-\dfrac{7}{4}\right) \times \left(\dfrac{\text{س}^3}{\text{س}^3}\right) = -\dfrac{7}{4}$ ؛

$\dfrac{15\text{س}^4}{-3\text{س}^4} = \left(\dfrac{15}{-3}\right) \times \left(\dfrac{\text{س}^4}{\text{س}^4}\right) = -5$.

بصفة عامة :

> $\text{أ}\,\text{س}^{\text{م}}$ ، $\text{ب}\,\text{س}^{\text{هـ}}$ وحيدا حد ، حيث $\text{ب} \neq 0$ و $\text{س} \neq 0$
>
> • إذا كان $\text{م} > \text{هـ}$ فإن $\dfrac{\text{أ}\,\text{س}^{\text{م}}}{\text{ب}\,\text{س}^{\text{هـ}}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}\,\text{س}^{\text{م}-\text{هـ}}$.
>
> • إذا كان $\text{م} < \text{هـ}$ فإن $\dfrac{\text{أ}\,\text{س}^{\text{م}}}{\text{ب}\,\text{س}^{\text{هـ}}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}\,\text{س}^{\text{هـ}-\text{م}}}$.
>
> • إذا كان $\text{م} = \text{هـ}$ فإن $\dfrac{\text{أ}\,\text{س}^{\text{م}}}{\text{ب}\,\text{س}^{\text{هـ}}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

3) مجموع وفرق وحيدي حد :

مثال 1 : لنحسب مجموع وحيدي الحد المتشابهين 3 س² و $-\frac{9}{5}$ س² .

$$3\text{ س}^2 + \left(-\frac{9}{5}\right)\text{ س}^2 = 3\text{ س}^2 - \frac{9}{5}\text{ س}^2 .$$

$$3\text{ س}^2 + \left(-\frac{9}{5}\right)\text{ س}^2 = \left(3 - \frac{9}{5}\right)\text{ س}^2$$ لأن الضرب توزيعي على الطرح .

$$3\text{ س}^2 + \left(-\frac{9}{5}\right)\text{ س}^2 = \frac{15-9}{5}\text{ س}^2 = \frac{6}{9}\text{ س}^2 .$$

> مجموع (أو فرق) وحيدي حد متشابهين هو وحيد حد مشابه لهما ، معامله هو مجموع (أو فرق) معامليهما .

مثال 2 : وحيدا الحد $\frac{3}{7}$ س و -5 س² غير متشابهين .

- المجموع الجبري $\frac{3}{7}$ س $-$ 5 س² يسمى **ثنائي حد** .
- مجموع عدة وحيدات حد غير متشابهة يسمى **كثير حدود** .

مثلا : س⁵ $-\frac{3}{2}$ س³ + 4 س $-$ 7 هو كثير حدود .

1) عيّن الجداءات الآتية :

$\text{س} \cdot \left(\frac{1}{2}\text{س}\right)$ ؛ $\text{س} \cdot \left(-\frac{2}{5}\text{س}\right)$ ؛

$\left(-\frac{3}{4}\text{س}^3\right)\text{س}$ ؛ $\left(-\frac{2}{3}\text{س}\right)\left(-\frac{5}{8}\text{س}^2\right)$

2) عيّن وحيدات الحد من بين حواصل القسمة الآتية :

$\frac{2\text{س}}{\text{س}}$ ؛ $-\frac{3}{2}\text{س} : \text{س}^2$ ؛ $-\frac{5}{7}\text{س}^2 : -\frac{3}{2}\text{س}$ ؛ $\frac{-\frac{7}{8}\text{س}^3}{-\frac{5}{6}\text{س}}$.

3. المعادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد :

أ) مفهوم المعادلة :

ـ أوجد ـ إن أمكن ـ عددًا ناطقًا س يحقق كلاً من الكتابات الآتية :

$\text{س} + 1 = 4$ ؛ $\frac{4}{5}\text{س} = 1$ ؛ $4\text{س} - 1 = 7$ ؛ $\frac{5}{3}\text{س} = 0$ ؛ $0\text{س} = 4$ ؛ $0\text{س} = 0$.

• لاحظ الكتابة $\text{س} + 1 = 4$.

ـ إذا عوضنا س بالعدد الناطق 3 فإننا نحصل على المساواة $3 + 1 = 4$.

ـ وإذا عوضنا س بأي عدد ناطق يختلف عن 3 فلا نحصل على مساواة .

ـ إن العدد الناطق الوحيد الذي يحقق الكتابة $\text{س} + 1 = 4$ هو 3 .

ـ الكتابة $\text{س} + 1 = 4$ تسمى **معادلة** من الدرجة الأولى ذات المجهول س .

ـ العدد الناطق 3 الذي يجعل هذه الكتابة مساواة أي الذي يحقق المعادلة $\text{س} + 1 = 4$ يسمى **حلاً** لهذه المعادلة .

• كل من الكتابات $\frac{4}{5}\text{س} = 1$ ؛ $4\text{س} - 1 = 7$ ؛ $\frac{5}{2}\text{س} = 0$ ؛

$0\text{س} = 4$ ؛ $0\text{س} = 0$ ؛ $\frac{3}{2}\text{س} - 5 = -\frac{7}{4}\text{س}$

هي أيضًا **معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد** س .

• إن مجموعة الأعداد التي تحقق معادلة تسمى **مجموعة حلول** هذه المعادلة .

ملاحظة :

عند الشروع في حل معادلة ، يجب **تحديد** المجموعة التي ينتمي إليها المجهول .

ب) حل بعض المعادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد :

مثال 1 : لنحل في المجموعة ك المعادلة $-\frac{7}{2}\text{س} = 9$.

ـ نضرب كلاً من طرفي المعادلة $-\frac{7}{2}\text{س} = 9$ في مقلوب $\left(-\frac{7}{2}\right)$.

نحصل على :

$$\left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{7}{2}\text{س}\right) = \left(-\frac{2}{7}\right) \times 9$$

أي $\left[\left(-\frac{2}{7}\right) \times \left(-\frac{7}{2}\right)\right]\text{س} = \left(-\frac{2}{7}\right) \times 9$.

(لأن الضرب ك تجميعي)

نستنتج أن 1 س $= -\frac{18}{7}$ أي س $= -\frac{18}{7}$.

يمكننا أن نتحقق أن : $\left(-\frac{7}{2}\right) \times \left(-\frac{18}{7}\right) = 9$.

إن العدد الناطق $-\frac{18}{7}$ هو **الحل الوحيد** للمعادلة $-\frac{7}{2}$ س $= 9$

نرمز لمجموعة حلول هذه المعادلة بالرمز مج.

نكتب مج $= \left\{-\frac{18}{7}\right\}$.

لاحظ أن حل هذه المعادلة هو حاصل قسمة العدد 9 على العدد $-\frac{7}{2}$.

أي س $= \frac{9}{-\frac{7}{2}} = 9 \times \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{18}{7}$.

مثال 2 : لنحل في المجموعة ك المعادلة 5 س $- \frac{1}{2} = 7$.

• نضيف معاكس العدد الناطق $-\frac{1}{2}$ إلى كلٍّ من طرفي هذه المعادلة.

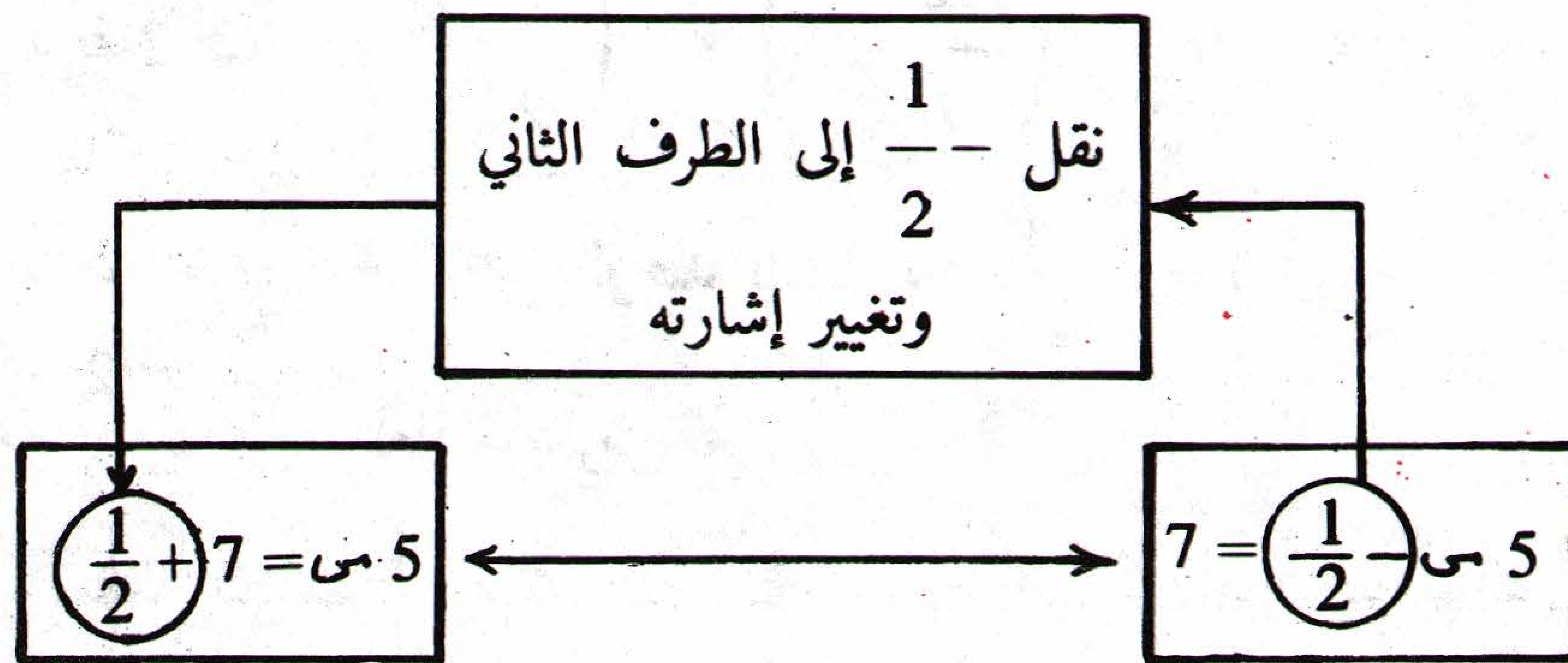
فنحصل على :

5 س $- \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 7 + \frac{1}{2}$.

أي 5 س $+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 7 + \frac{1}{2}$

ومنه 5 س $= 7 + \frac{1}{2}$.

لاحظ في المعادلة $5\text{س} - \frac{1}{2} = 7$ أننا **نقلنا** $-\frac{1}{2}$ من الطرف الأول إلى الطرف الثاني وغيرنا إشارته .



من المعادلة $5\text{س} = 7 + \frac{1}{2}$ نستنتج أن : $5\text{س} = \frac{15}{2}$

$$\text{س} = \frac{\frac{15}{2}}{5} = \frac{15}{2} \times \frac{1}{5}$$

إذن $\text{س} = \frac{3}{2}$

ملاحظتان :

1) مجموعة حلول المعادلة $5\text{س} - \frac{1}{2} = 7$ في ك هي مج $= \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

2) العدد $\frac{3}{2}$ ينتمي إلى ك ولا ينتمي إلى أيٍّ من المجموعتين ط ، ص .

نقول إن المعادلة $5\text{س} - \frac{1}{2} = 7$ لها **حل** في ك **وليس لها حل** في كلّ من ط ، ص أي أن مجموعة حلول هذه المعادلة في كلٍّ من ط ، ص هي المجموعة الخالية .

مثال 3 : لنحل في ك المعادلة 3 س + 5 = − 2 س + 1

• ننقل العدد 5 إلى الطرف الثاني مع تغيير إشارته فيكون :

3 س = − 2 س + 1 − 5

أي 3 س = − 2 س − 4

• نضيف معاكس − 2 س إلى الطرفين فيكون :

3 س + (+ 2 س) = − 2 س − 4 + (+ 2 س)

أي 3 س + 2 س = (− 2 س + 2 س) − 4

أي 3 س + 2 س = − 4

لاحظ في المعادلة 3 س = − 2 س − 4 أننا **نقلنا** (− 2 س) من الطرف الثاني إلى الطرف الأول مع تغيير إشارته .

من المعادلة 3 س + 2 س = − 4 نستنتج أن :

5 س = − 4

ومنه س = − 4/5

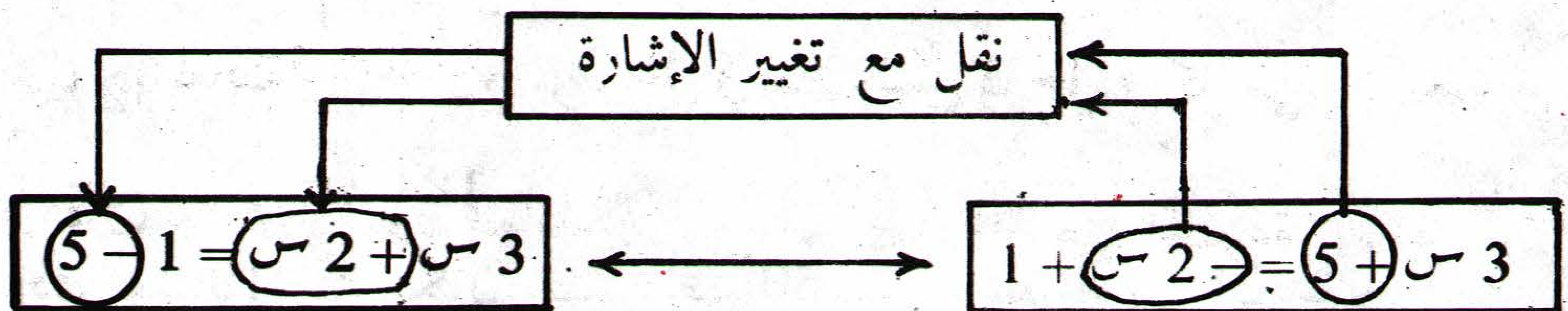
ملاحظات :

1) مجموعة حلول المعادلة 3 س + 5 = − 2 س + 1 في ك هي مج = { − 4/5 }

2) مجموعة حلول هذه المعادلة في كل من ط ، ص هي المجموعة الخالية ϕ .

3) إذا نقلنا أي حدّ من طرف معادلة إلى الطرف الآخر ، فإننا نغير إشارته .

4) إذا وجد المجهول في كلّ من طرفي معادلة فمن الضروري جعل الحدود التي يظهر فيها المتغير في طرف والحدود الثابتة في الطرف الآخر.



حل بعض المسائل التي تؤول إلى حل معادلة :

مثال : : أوجد ثلاثة أعداد طبيعية متتالية مجموعها 72 .

الحل :

نسمي س أصغر هذه الأعداد

فتكون الأعداد س ، س + 1 . س + 2 أعداد طبيعية متتالية .

إذن : $س + (س + 1) + (س + 2) = 72$

أي $3س + 3 = 72$

ومنه $3س = 72 - 3$

نستنتج أن $3س = 69$

أي $س = \frac{69}{3} = 23$.

إذن : العدد الأول هو 23 .

العدد الثاني هو $23 + 1$ أي 24 .

العدد الثالث هو $23 + 2$ أي 25 .

• لاحظ أن $23 + 24 + 25 = 72$.

مثال 2 : عمر أب 32 سنة وعمر ابنه 7 سنوات . بعد كم سنة يصبح عمر الأب ضعف ابنه ؟

الحل :

- نسمي س عدد السنوات المطلوبة .

فيصبح عندئذ عمر الأب (32 + س) وعمر الإبن (7 + س) .

ويكون :

$32 + س = 2(7 + س)$.

أي $32 + س = 14 + 2س$.

نستنتج أن : $س = 18$

إذن بعد 18 سنة يكون عمر الأب 50 سنة وعمر الإبن 25 سنة .

التمارين

1. عيّن وحيدات الحد من بين العبارات الآتية :

$\frac{س^2}{3}$ ؛ $\frac{2س^2}{س}$ ؛ $س^2 - 3$ ؛ $\frac{27}{6}س^5$ ، $-\frac{3}{2}س^2 \times س^3$.

2. عيّن معامل ودرجة كل من وحيدات الحد الآتية :

$-12س^2$ ؛ $\frac{3}{4}س$ ؛ $-\frac{1}{2}س^7$ ؛ $-س^3$ ، -5 .

3. عيّن وحيدات الحد من بين العبارات الآتية ، حيث أ عدد ناطق ثابت و س متغير وغير معدوم .

$\frac{س^2}{2أ}$ ، $\frac{-5أس}{3س^2}$ ؛ $\frac{أس^2}{2}$ ؛ $(أ-5)س^2$ ؛ $-16س$ ؛ $3أ^2(س+2)$.

4. عيّن وحيدات الحد المتشابهة من بين وحيدات الحد الآتية :

$4,2س^4$ ؛ $\frac{-15س^2}{3}$ ؛ $\frac{-7}{-5}س^3$ ، $5س^3$ ؛ $-\frac{3}{2}س^4$ ؛ $س^2$ ، $\left(-2+\frac{1}{2}\right)س$.

5. ما هو معاكس كل من وحيدات الحد الآتية :

$\frac{3}{5}س^3$ ؛ $-\frac{14}{8}س$ ، $\frac{18}{6}س^2$ ؛ $\frac{-3}{-12}س^5$.

6. احسب كلاً من الجداءات التالية :

$\left(-\frac{3}{4}س\right)\times\left(-5س^3\right)$ ؛

$\left(\frac{1}{3}س^2\right)\times\left(-\frac{3}{5}س^3\right)$ ؛

$\left(\frac{4}{3}س^2\right)\times\left(\frac{5}{4}س\right)$.

7. احسب كلاً مما يلي :

1) $\frac{3}{4}$ س^{2} + $\frac{5}{3}$ س^{2} ، س^{4} + $\frac{7}{8}$ س^{4} ؛ $\frac{7}{3}$ س^{3} + 4 س^{3} .

2) $\frac{9}{4}$ س^{3} − $\frac{11}{2}$ س^{3} ؛ 2 س^{5} − $\frac{1}{3}$ س^{5} ؛ − $\frac{12}{5}$ س − $\frac{21}{3}$ س .

8. اوجد حاصل القسمة في كل مما يلي :

حيث س عدد ناطق غير معدوم

$\frac{1}{4}$ س^{2} : − 2 س^{2} ، $\frac{7}{2}$ س^{3} : $\frac{3}{4}$ س^{2} ، 12 س^{3} : $\frac{4}{3}$ س^{2} ، $\frac{18}{6}$ س^{2} : − $\frac{2}{3}$ س

9. حل في ك كلا من المعادلات الآتية :

1) 2 س + 15 = 26 ، 2) 3 س + 23 = 17

3) $\frac{5}{3}$ س − $\frac{7}{4}$ س = $\frac{13}{15}$ ، 4) 12 س − 24 = 0 .

10. حل في ص كلا من المعادلات الآتية :

1) 3 س − 27 = 7 س − 8 ؛ 2) $\frac{9\text{س}}{5}$ − 7 = $\frac{8\text{س}}{10}$ + 2

3) $\frac{7}{4}$ س − $\frac{3}{8}$ س + $\frac{5}{2}$ = 5 ؛ 4) 5 س + 3 = 2 س + 3

11. حل في ط كلا من المعادلات الآتية :

1) 12 س − 2 = 22 ؛ 2) 24 س − 18 = 6 س

3) 7 س − 3 = 0 ؛ 4) $\frac{3}{2}$ س − 6 = $\frac{4}{3}$ س

12. أوجد ثلاثة أعداد طبيعية زوجية متتالية مجموعها 108 .

13. أوجد عددين طبيعيين فرديين متتاليين مجموعها 76

14. أوجد العدد الذي مجموع ثلثه وربعه وخمسه يساوي 47

15. إذا طرحنا 19 من ثلاثة أمثال عدد يكون الناتج 122 فما هو هذا العدد ؟

16. اقتسم ثلاثة أشخاص مبلغا قدره 749 دج حيث كانت حصة الثاني ثلثي حصة الأول ، وكانت حصة الثالث تزيد عن حصة الثاني بقدر 14 دج أوجد حصة كل منهم .

17. استهلكت سيارة من البنزين $\frac{3}{10}$ سعة خزانها في اليوم الأول ، واستهلكت 13 لترا في اليوم الثاني وبقي $\frac{3}{8}$ سعة هذا الخزان . فما هي سعة هذا الخزان ؟

18. تقاس الكتلة بالكيلوغرام وتقاس الإستطالة بالمتر.
ـ نعلق في نهاية نابض كتلاً مختلفة ونقيس الإستطالات الموافقة لها .
وفي نهاية التجربة نحصل على النتائج المدوّنة في الجدول الآتي ، حيث ع هو رمز الكتلة و س رمز الإستطالة .

ع	0,15	0,25	0,40	0,60	0,75	1,00	1,40
س	0,03	0,05	0,08	0,12	0,15	0,20	0,28

1) نمثل الإستطالة على نصف مستقيم [م س والكتلة على نصف مستقيم [م ع حيث (م س) ⊥ (م ع) .
1 سم يمثل 0,03 م على [م س و 1 سم يمثل 0,1 كغ على [م ع .
ـ مثّل النقط التي إحداثيا كل منها س وِ ع المدوّنة في الجدول .
ـ صل بين هذه النقاط . ماذا تلاحظ ؟
2) عيّن باستخدام التمثيل البياني كلاً من :
أ ـ الإستطالة الناتجة عن تعليق كتلة قدرها 500 غ .
ب ـ الكتلة اللازمة لكي يستطيل النابض مسافة 0,16 م .
3) أوجد حسابيًا نتيجتي السؤال الثاني .

الفهـرس

الدرس	العنوان	عدد الصفحات
1	المستقيمات والزوايا	3
2	مجموعة الأعداد الصحيحة	22
3	الجمع والطرح والترتيب في (ص)	29
4	المثلثات	58
5	الضرب في (ص)	77
6	خواص هندسية أساسية	92
7	المجموع الجبري والجداءات الشهيرة في (ص)	113
8	الرباعيات 1 : مراجعة وتتمات ـ متوازي الأضلاع	128
9	مجموعة الأعداد الناطقة	146
10	الرباعيات 2 : متوازيات الأضلاع الخاصة	168
11	الضرب والقسمة في ك ـ قوة عدد ناطق	184
12	الدائرة	212
13	الجمع والطرح في ك ـ المجموع الجبري ـ الجداءات الشهيرة	223
	الطرح في ك	230
	المجموع الجبري ـ الجداءات الشهيرة	236
14	الزوايا والأقواس في دائرة	246
15	الترتيب في ك	265
16	مبادئ أولية في الهندسة الفضائية	280
17	تطبقات في ك	286



MS – 0802
2000 - 1999

ي * تصوير ومعالجة : عمروسي كمال * تصوير ومعالجة : عمروسي كمال تصوير ومعالجة : عمروسي كمال

ى * تصوير ومعالجة : عمروسي كمال * تصوير ومعالجة : عمروسي كمال * تصوير ومعالجة : عمروسي كمال تصوير ومعالجة : عمروسي كمال